1(300) Axiomatische Einführung der reellen und komplexen Zahlen

1.1(300) Gruppen und Körper

Zahlen	Einführungsgrund
1.)natürliche Zahlen $\mathbb{N}:=\{1,2,3,...\}$ $\mathbb{N}_0:=\{0,1,2,3,...\}$	Abzählung
2.)ganze Zahlen $\mathbb{Z}:=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-1.-2.-3...\}$ $=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-n \mid n\in\mathbb{N}\}$	Lösen von Gleichungen der Form $x+n=m$ mit $n,m \in\mathbb{N}$. Menge der ganzen Zahlen
3.)rationale Zahlen $\mathbb{Q}:=\left\{\frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$	Lösen von Gleichungen der Form $x\cdot n=m$ mit $n,m\in\mathbb{Z}$x. Menge der rationalen Zahlen
4.)reelle Zahlen $\mathbb{R}$	Lösen geometr. Aufg. 2π Einheitskreisumf Grenzwerte von Zahlenfolgen aus $\mathbb{Q}$. $x^2=2$
5.)komplexe Zahlen	Lösen quadrat.Gleichungen $x^2+1=0$

Im Folgenden werden 2 unterschiedliche Verknüpfungen $\oplus,\otimes$ definiert die nicht mit den aus dem bürgerlichen Rechnen bekannten Plus + und Mal * identisch sein müssen, aber wie aus den Rechenregeln dann ersichtlich sein wird, identisch sein können. Da es sich jedoch meist um die Verknüpfungen +,* handelt, erscheinen in der Regel später nur diese im weiteren Text. Sollten andere Verknüpfungen gemeint sein, werden wieder $\oplus,\otimes$ verwendet. 0 und 1 sind zunächst auch nicht bekannt, deshalb erscheinen, um auch Verwechslungen aus alter Gewohnheit zu vermeiden, die Zeichen **0** und **1** mit evt anderer Bedeutung. In Formeln ist mir nicht bekannt, wie in meinem Textbearbeitungsprogramm die Symbole gestaltet werden können. Aus dem Zusammenhang sollte jedoch ersichtlich sein, was gemeint ist. Änderungen erfolgen später.

Mengen und Verknüpfungen

D1.1.1(301) Eine Verknüpfung ordnet durch eine Vorschrift Elementen einer Menge Element(e) einer Menge zu. Dadurch entsteht ein Verknüpfungsgebilde.

Verknüpfungsgebilde auf einer Menge:

- Menge M, mit einer auf ihr definierten Verknüpfung. Symbol: $\circ$
- $M\neq\emptyset$
- $a,b\in M$ wird $a\circ b$ $\in M$ zugeordnet.
  Abbildung w, die 2 Elementen aus M ein Element von M zuordnet, Schreibweise (M,w)

D1.1.2 (301)

a) Kommutatives Verknüpfungsgebilde
$\forall$ $a,b\in M$ gilt $a\circ b = b\circ a \Leftrightarrow$
(M, $\circ$) heißt kommutatives Verknüpfungsgebilde

b) Assoziatives Verknüpfungsgebilde
$\forall$ $a,b\in M$ gilt $(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c) \Leftrightarrow$
(M, $\circ$) heißt assoziatives Verknüpfungsgebilde

c) Verknüpfungsgebildemit Existenz von neutralen Elementen
Vor: $n\in M$, (M, $\circ$)
Aussage: n heißt neutrales Element in (M, $\circ$)$\Leftrightarrow$
$\forall$ $a\in M$ gilt $a \circ n=n \circ a=a$

d) Verknüpfungsgebilde mit Existenz von inversen Elementen
Vor: $a,n\in M$, (M, $\circ$), (n neutrales Element)
Aussage: In (M, $\circ$) heißt $a'\in M$ inverses Element von a $\Leftrightarrow$
$a \circ a'=a' \circ a=n$

D1.1.3 (302)Eine Gruppe ist eine Menge G mit Verknüpfung $\circ$
z.B +, * usw $G \circ G\rightarrow G$, $(a,b)\rightarrow a \circ b$, sodass folgende Axiome $\forall$ $a,b,c\in G$ erfüllt sind

a) Assoziativgesetz $(a \circ b) \circ c=a \circ (b \circ c)$
b) $\exists$ neutrales Element $e\in G$, $a \circ e=a$
c) $\forall$ $a\in G$ $\exists$ Inverses Element $a'\in G$: $a \circ a'=e$

Bem: Man sagt G ist abgeschlossen, da alle Elemente und Ergebnisse in G

L1.1.1 (303)Sei G Gruppe

a) Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt
b) Es gilt $e \circ a=a \circ e=a$ $\forall$ $a\in G$
c) Zu gegebenem $a\in G$ ist das Inverse eindeutig bestimmt
d) Es gilt $a' \circ a=e$ (nicht nur $a \circ a'=e$)
b) $ea=(aa')a=a(a'a)=ae=a$
a) Sei $\bar{e}$ ein weiteres neutrales Element zu e $\Rightarrow e\bar{e}=e$
c) Sei $\bar{a}$ eine weiter Inverse zu a $\Rightarrow$
$\bar{a}=e\bar{a}=(a'a)\bar{a}=a'(a\bar{a})=a'e=a'$

Schreibweise: a^{-1}= Inverse zu a

L1.1.2 (303) $(a^{-1})^{-1}=a$, $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$, $ax=ay \Rightarrow x=y$, da $\underbrace{a^{-1}a}_{e}x=\underbrace{a^{-1}a}_{e}y$

D1.1.4 (303) $H\in G$ heißt Untergruppe, falls H mit der Verknüpfung von G selbst eine Gruppe ist.

L1.1.3 (303) H Untergruppe von G

a) Das neutrale Element von H ist das von G

D1.1.5 (304) Gruppe G heißt abelsch,
falls G Gruppe und ab=ba $\forall$ a,b$\in$G

D1.1.6(306)Menge $M_H \neq \emptyset$ ist Halbgruppe $\Leftrightarrow$
- $(M_H, \circ)$ abgeschlossen
- •• Es gilt das Assoziativgesetz $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ $\forall$ a,b,c$\in M_H$

Bem: Jede Gruppe ist eine Halbgruppe

D1.1.7(306) Menge $M_R \neq \emptyset$ mit 2 Verknüpfungen $\oplus,\otimes$ ist ein Ring $(M_R,\oplus,\otimes)$ $\Leftrightarrow$
Es gilt • $(M_R,\oplus)$ ist abelsche Gruppe
•• $(M_R,\otimes)$ ist Halbgruppe
••• Es gelten die Distributivgesetze
$a\otimes(b\oplus c)=a\otimes b+a\otimes c$
$(a\oplus b)\otimes c= a\otimes c+b\otimes c$ $\forall$ a,b,c$\in M_R$.

D1.1.8(306) Eine Menge mit mindestens 2 Elementen heißt Körper K
$(K,\oplus,\otimes)$: $\Leftrightarrow$ $\exists$ 2 Abbildungen(2stellige Verknüpfungen)
$\oplus: K\times K\to K$ und $\otimes: K\times K\to K$ welche folgenden Axiomen genügen:

(A1) Assoziativgesetz für Assoziativgesetz für $\oplus$:
$(a\oplus b)\oplus c= a\oplus(b\oplus c)$ $\forall$ a,b,c$\in$K,
(A2) Existenz des $\oplus$ neutralen Elements bzgl $\oplus$:
$\exists$ genau ein Element $0\in K$ mit $a\oplus 0= a$ $\forall$ $a\in K$
(A3) Existenz eines Inverselements bzgl $\oplus$:
$\forall$ $a\in K$ $\exists$ genau ein $-a\in K$ mt $a\oplus(-a)=0$
(A4) Kommutativgesetz bzgl $\oplus$: $a\oplus b = b\oplus a$ $\forall$ a,b$\in$K
(M1) Assoziativgesetz für $\otimes$: $a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c$ $\forall$ a,b,c$\in$K
(M2) Existenz des bzgl $\otimes$ neutralen Elements Eins:
$\exists$ genau ein Element $1\in K$ mit $1\neq 0$ und $a\otimes 1=a$ $\forall$ $a\in K$
(M3) Existenz des bzgl $\otimes$ inversen Elements
$\forall$ $a\in K\setminus\{0\}$, $\exists$ genau ein Element $a^{-1}\in K$ mit $a\otimes a^{-1}=1$
(M4) Kommutativgesetz bzgl $\otimes$: $a\otimes b=b\otimes a$ $\forall$ a,b$\in$K
(D) Distributivgesetz für $\oplus$ und $\otimes$: $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$

Andere Formulierung:
Ein Körper ist: Eine Menge K mit 2 Verknüpfungen $\oplus,\otimes$: $K\times K\to K$,
so dass: 1. $(K,\oplus)$ ist eine abelsche Gruppe
das neutrale Element heißt $0=0_K$
2. $(K^{\otimes}=K\setminus\{0\},\otimes)$ ist eine abelsche Gruppe
3. Es gilt das Distributivgesetz
$a\otimes(b\oplus c)=a\otimes b\oplus a\otimes c$
Das neutrale Element von $(K^{\otimes},\otimes)$ wird $1=1_K$ genannt.

Beachte, dass das Ergebnis von $\oplus$ oder $\otimes$ per Definition wieder zu K gehören muss. Wir sagen auch: ein Körper ist immer abgeschlossen bezgl $\oplus$ und $\otimes$. Sind die beiden Abbildungen Addition bzw Multiplikation, dann sind die Elemente des Körpers Zahlen. Jeder derartige Körper K enthält mindestens 2 Zahlen, nämlich 0 und 1 und es gibt einen Körper, der genau aus diesen Zahlen besteht:

Bem:1.)(A1),(A2),(A3) bedeutet bzgl $\oplus$:$(K,\oplus)$ ist Gruppe,
die wegen (A4) Abel'sch ist.

(M1),(M2),M3) bedeuten, $(K\setminus\{0\},\otimes)$ ist Gruppe, die wegen (M4) Abel'sch ist

2.) Läßt man in (A2) die Eindeutigkeit von 0 weg, so folgt diese aus (A4):

3.) Läßt man in (A3) die Eindeutigkeit von $-a$ weg, so folgt diese aus (A1),(A2),(A4):

4.) Analog folgt in (M2) die Eindeutigkeit der 0 mit (M4) und in (M3) folgt die Eindeutigkeit von a^{-1} für $a\neq 0$ auch aus den anderen Axiomen (M1),(M2),(M4) statt $\oplus\to\otimes$

Konventionen: $a\otimes b\oplus c\otimes d := (a\otimes b)\oplus(c\otimes d)$ $\quad a-b := a\oplus(-b)$

$-a-b := (-a)\oplus(-b)$ $\quad \frac{a}{b} := a/b := a:b := a\otimes b^{-1}, b\neq 0$

b^{-1}:= inverses Element von b

Zu (M3): Sei $(a,a)\in K\times K\setminus\{(0,0)\}$

Ansatz: $(a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2)=(a_1\otimes b_1-a_2\otimes b_2, a_1\otimes b_2\oplus a_2\otimes b_1)=(1,0)\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} a_1b_1 - a_2b_2 &= 1\\ a_1b_2 + a_2b_1 &= 0\end{aligned}\right\}\text{unbekannt } b_1, b_2 \Leftrightarrow b_1=\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2},\quad b_2=\frac{-a_2}{(a_1^2+a_2^2)\neq 0}$$

5.) Ein Körper hat mindestens die Elemente 0 und 1

(312) **Abgeleitete Rechenregeln (RR) in K:**

Sei K ein Körper. Dann gilt $\forall$ a,b,c

1.) $0\neq 1$

1.) $a\oplus 0=0\oplus a=a$, $a\oplus(-a)=(-a)\oplus a=0$ $\quad\forall a\in K$

$a\otimes 1=1\otimes a=a$ $\forall a\in K$, $a\otimes a^{-1}=a^{-1}\otimes a$ $\forall a\neq 0$

2.) $\forall a,b\in K\ \exists$ genau ein $x\in K$: $a\oplus x=b$ mit $x=b-a$

Andere Formulierung

Für $x=b-a$ gilt $a\oplus x \underset{(A4)}{=} a\oplus b-a=a-a\oplus b=a\oplus(-a)\oplus b \underset{(A3)}{=} 0\oplus b \underset{(A4)}{=} b\oplus 0 \underset{(A2)}{=} b$

Eindeutigkeit:

Annahme x und y sind Lösungen $\Rightarrow a\oplus x=a\oplus y \Rightarrow -a\oplus(a\oplus x)=-a\oplus(a\oplus y) \Rightarrow$ $x\oplus 0=y\oplus 0 \Rightarrow x=y$

3.) (.) $-(-a)=a$ $\quad$ (..) $-(a\oplus b)=-a-b$ $\quad -0=0$

4.) $\forall a,b\in K$, $a\neq 0$. $\exists$ genau ein $x\in K$: $a\otimes x=b$

nämlich $x=a^{-1}\otimes b=b\otimes a^{-1}=b/a$

5.) $(a^{-1})^{-1}=a$, $(a\otimes b)^{-1}=a^{-1}\otimes b^{-1}$ $\forall a,b\in K$, $a,b\neq 0$

6.) $a\otimes b=0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$. Speziell $\Rightarrow a^{-1}\neq 0$ $\forall a\neq 0$

7.) $(-1)\otimes a=-a$, $-(a\otimes b)=(-a)\otimes b=a\otimes(-b)$

8.) ● $a(b-c)=ab+ac$, ●● $ac=ab$, $a\neq 0 \Rightarrow c=b$

b=c

9) $(-a)\otimes(-b)=a\otimes b$

10.) $\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a\otimes d\oplus c\otimes d}{b\otimes d}$ $\quad\forall a,b,c,d\in K$, $b,d\neq 0$

$\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}=\frac{a\otimes c}{b\otimes d}$ folgt aus (M4) $b,d\neq 0$

D1.1.9 (321) Die Charakteristik von Körper K

char(K)=das kleinste $m\in\mathbb{N}$ mit $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m\,mal}=0$ falls es dieses m gibt.

Falls es dieses m nicht gibt, gelte char(K)=0

S1.1.1 (321) $char(\mathbb{F}_P=\mathbb{Z}_{/P})=P$ (P eine Primzahl)

1.2(400) Die Anordnungsaxiome

Axiomatische Beschreibung einer linearen Anordnung aller Elemente eines Körpers

D1.2.1(400) Ein Körper $(\mathbb{K},+,*)$ heißt angeordnet: $\Leftrightarrow$ Auf $\mathbb{K}$ existiert eine Anordnungsrelation R:=<(„kleiner"), die folgende Eigenschaften (Anordnungsaxiome) erfüllt:

(O1) $\forall\ a,b\in\mathbb{K}$ gilt genau eine der folgenden Eigenschaften:
$a<b$ oder $b<a$ oder $a=b$ (Trichotonie)
$\forall\ a,b\in\mathbb{K}$ $((a,b))\in<$ oder $(b,a)\in<$ oder $a=b)$

(O2) Aus $a<b$ und $b<c \Rightarrow a<c$ (Transitivität) $\forall\ a,b,c\in\mathbb{K}$
$(a,b)\in<$ und $(b,c)\in< \Rightarrow (a,c)\in<$

(O3) $a<b \Rightarrow a+c < b+c\ \forall\ c\in\mathbb{K}$
$a<b$ und $0<c \Rightarrow a*c < b*c$ (Monotonie)
$(a,b)\in<, (a+c, b+c)\in<\ \forall\ c\in\mathbb{K}$
$(a,b)\in<$ und $(0,c)\in< \Rightarrow (a*c,b*c)\in< \subset \mathbb{K}\mathrm{x}\mathbb{K}=\mathbb{K}^2$

Bezeichnungen, Sprechweisen $a,b\in\mathbb{K}$
$\mathbb{K}$ angeordneter Körper: $(\mathbb{K},+,*,<)$, $<\subset \mathbb{K}\mathrm{x}\mathbb{K}=\mathbb{K}^2$
a kleiner b: $\Leftrightarrow a<b$,
a größer b: $\Leftrightarrow b<a$ bzw $a>b$
a ist positiv(negativ): $\Leftrightarrow 0<a$ bzw $a>0$ ($a<0$ bzw $0>a$)
a ist kleiner oder gleich b: $\Leftrightarrow a<b$ oder $a=b$, ($a\leq b, b\geq a$)
a ist größer oder gleich b: $\Leftrightarrow a>b$ oder $a=b$, ($a\geq b$)
a ist nicht negativ: $\Leftrightarrow a\geq 0\quad 0\leq a$

Andere Formulierung (siehe auch A1.2.5. b). Besser erst nach A1.2.5 genauer lesen. $\mathbb{K}_+$ ist für Lösung A1.2.5 wichtig):
Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt geordnet wenn es eine Teilmenge $\mathbb{K}_+$ gibt,welche folgende Eigenschaften besitzt:

(O1*) $\forall\ a\in\mathbb{K}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:
$a\in\mathbb{K}_+$ oder $-a\in\mathbb{K}_+$ oder $a=0$

(O2*) $\forall\ a\in\mathbb{K}_+: a+b\in\mathbb{K}_+$

(O3*) $\forall\ a,b\in\mathbb{K}_+: ab\in\mathbb{K}_+$

Die Menge $\mathbb{K}_+$ heißt auch postitiver Kegel von $\mathbb{K}$ und jedes $a\in\mathbb{K}_+$ heißt positiv. Ist $-a\in\mathbb{K}_+$, so heißt a negativ. Wir können also die Axiome (O1)-((O3) wie folgt in Worte fassen: Ein beliebiges $a\in\mathbb{K}$ ist entweder positiv oder negativ oder =0, und Summe und Produkt von positiven Zahlen sind wieder positiv. Weiter setzten wir noch:
$a<b \Leftrightarrow b>a \Leftrightarrow b-a\in\mathbb{K}_+\qquad a\leq b \Leftrightarrow b\geq a \Leftrightarrow a=b$ oder $a<b$
Mit diesen Bezeichnungen folgt direkt aus (O1*), angewandt auf b-a:
$\forall\ a,b\in\mathbb{K}$ gilt genau eine der drei Aussagen $a<b$ oder $a>b$ oder $a=b$

(400)Abgeleitete Rechenregeln in einem angeordneten Körper (RR<)
1.) $a<b \Leftrightarrow a-b < 0 \Leftrightarrow b-a>0$
2.) $a>b \Leftrightarrow -a<-b$, speziell $a>0 \Leftrightarrow -a<0$

3.)(.)a,b>0 d.h. $a>0$ und $b>0 \Rightarrow ab>0$
(..)$a>0, b<0 \Rightarrow ab<0$,
(...) $a<0$ und $b<0 \Rightarrow ab>0$
4.)$a\neq 0 \Rightarrow a^2:=a\cdot a>0$, speziell $1>0, -1<0$
5.)$a>0 \Leftrightarrow a^{-1}>0$
6.)$a<b$ und $c<0 \Rightarrow ac>bc$
7.)$0<a<b \Rightarrow 0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$
8.)a=b genau dann, wenn $a\leq b$ und $b\leq a$
9.)$a<b \Rightarrow \exists\ c\in(K,<)$ (z.B. $c=(a+b)/2$, $2:=1+1$) mit $a<c<b \Rightarrow$
$\forall\ \lambda\in K$ mit $0<\lambda<1$ gilt $a < a\lambda+(1-\lambda)b < b$

D1.2.2(405) Sei $K=(K,+,{}^*,<)$ ein angeordneter Körper und $T\subset K$, $T\neq\emptyset$.
Ein Element $\overline{m}\in T$ heißt das Maximum von T ($\overline{m}=\max T$):$\Leftrightarrow$ $\forall$ $t\in T$ gilt $t\leq \overline{m}$
Ein Element $\underline{m}\in T$ heißt das Minimum von T ($\underline{m}=\min T$):$\Leftrightarrow\forall$ $t\in T$ gilt $\underline{m}\leq t$

Bem:1.)Zu $T\subset K$, $T\neq\emptyset$ muß kein maxT bzw minT existieren
2.)Sei $T_1\subset T_2\subset K$ und $\exists$ $\overline{m}_i=\max T_i$, $i=1,2 \Rightarrow \overline{m}_1\leq \overline{m}_2$
3.)Wenn für $T\subset K$, $T\neq\emptyset$ maxT oder minT existiert, so ist dieses eindeutig.

D1.2.3(407) Sei K angeordneter Körper und $a\in K$ dann heißt
$|a|:=\max\{a,-a\}=\begin{cases} a \text{ falls } a\geq 0 \\ -a \text{ falls } a<0\end{cases}$ der Absolutbetrag von a
Bem:1.)Offensichtlich existiert das max wie angegeben
2.)Für $a,b\in K$ heißt $d=|a-b|$ der Abstand von a und b

S1.2.1(407) Vor: K sei angeordneter Körper und $a,b\in K$
- Beh:1.)$|a|=|-a|$
- 2.)$|a|\geq 0$ und $|a|=0 \Leftrightarrow a=0$
- 3.)$|ab|=|a||b|$
- 4.)(.)$b\neq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}=|a|\cdot|b|^{-1}$, speziell (..)$|b^{-1}|=|b|^{-1}$
- 5.)$a=0 \Leftrightarrow |a|<\varepsilon$ $\forall\varepsilon\in K$ mit $\varepsilon>0$
- 6.)$|a+b|\leq|a|+|b|$ (Dreiecksungleichung)
- 7.)$|a+b|\geq||a|-|b||\geq|a|-|b|$
- 8.)$||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$
Linke Ungleichung heißt Dreiecksungleichung nach unten.

D1.2.4(412) Für $a\in R$ heißt
sgn $a=\begin{cases} 1 \text{ für } a>0 \\ 0 \text{ für } a=0 \\ -1 \text{ für } a<0\end{cases}$ das Vorzeichen oder das Signum von a und
$|a|=a$ * sgn $a=\begin{cases} \text{a fuer a>=0} \\ -a \text{ fuer a<0}\end{cases}$ der Betrag von a

S1.2.2(412) $\forall$ $a,b\in R$ gilt
1.)$a=b \Leftrightarrow |a|=|b|$ und sgn a=sgn b
2.)sgn(ab)=(sgn a)(sgn b), $|ab|=|a||b|$
3.)$b\neq 0 \Rightarrow$ (sgn a)/(sgn b)=sgn(a/b), $|a/b|=|a|/|b|$

1.3(500) Das Vollständigkeitsaxiom und die Definition der reellen Zahlen

Alle bisherigen Überlegungen gelten z.B auch für den Körper der rationalen Zahlen.

D1.3.1(500) Sei (K,<) angeordneter Körper T⊂K, T≠∅

1.) Ein Element $\bar{s}$ ∈K ($\underline{s}$ ∈K) ($\bar{s}$, $\underline{s}$ müssen nicht zu T gehören) heißt obere (untere) Schranke von T: ⇔ ∀ t∈T gilt t≤ $\bar{s}$ (t≥ $\underline{s}$)

2.) T heißt nach oben (unten) beschränkt⇔ ∃ eine obere (untere) Schranke von T

3.) T heißt beschränkt:⇔ T ist nach oben und unten beschränkt.

4.) Ein $\overleftarrow{s}$ ∈K ($\underrightarrow{s}$ ∈K) heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von T (größte untere Schranke oder Infimum von T): ⇔

α) $\overleftarrow{s}$ ($\underrightarrow{s}$) ist obere (untere) Schranke von T

β) $\overleftarrow{s} \le \bar{s}$ ∀ oberen Schranken $\bar{s}$ von T ($\underrightarrow{s} \ge \underline{s}$ ∀ unteren Schranken $\bar{s}$ von T)

Bez: $\overleftarrow{s}$ =supT ($\underrightarrow{s}$ =inf T)

Andere Formulierung:

a=supA: $\begin{cases} \forall\, x\in A: x\le a \text{ d.h. } a \text{ ist obereSchranke von } A \\ \forall\, c\in R: x\le c\ \forall\, x\in A \Rightarrow a\le c, \text{ d.h. } a \text{ ist obereSchranke von } A \end{cases}$ ⇔

a∈R ist kleinste obere Schranke von A

Bem: a∈T, z.B. T={t|t≥a} ⇒ a=inf T=min T
a∉T, z.B. T={t|t>a} ⇒ a=inf T≠min T

Bez: 1.) Ist T⊂K nach oben/unten nicht beschränkt, so schreibt man supT:=∞ (infT:=-∞) (dann existiert supT/infT nicht)
2.) Für T=∅ sei sup ∅:=-∞, inf T:=+∞

Bem: 1.) T⊂K ist beschränkt ⇔ ∃ c∈K mit |t|≤c ∀ t∈T
2.) Falls existent, sind sup T und inf T eindeutig bestimmt
3.) Sei T⊂K, T≠∅, ∃ sup T bzw inf T ⇒
sup T = min{ $\bar{s}$ | $\bar{s}$ ist obere Schranke von T in K}
inf T = max{ $\underline{s}$ | $\underline{s}$ ist untere Schranke von T in K}
d.h. sup T und inf T müssen nicht, können aber ∈K sein.
Wenn sup T bzw inf T ∈K, siehe S1.3.1 2.

Zusätzliche Ausführungen:

Seien $A\neq\emptyset$, $A,B\subset K$ und sei $\zeta\in K$. Wir schreiben dann

$A\le\zeta \Leftrightarrow \zeta\ge A \Leftrightarrow \forall\ a\in A: a\le\zeta$ obere Schranke, muss nicht in A enthalten sein

$A\ge\zeta \Leftrightarrow \zeta\le A \Leftrightarrow \forall\ a\in A: a\ge\zeta$ untere Schranke, muss nicht in A enthalten sein

$A\le B \Leftrightarrow B\ge A \Leftrightarrow \forall\ b\in B: A\le b$

Jedes ζ mit $A\le\zeta$ heißt obere Schranke für A, jedes ζ mit $A\ge\zeta$ heißt untere Schranke für A. Falls A eine obere (untere) Schranke besitzt, dann heißt A nach oben(unten)beschränkt. Falls A nach oben und unten beschränkt ist, nennen wir A kurz beschränkt.

$a\in A$, welches gleichzeitig obere(untere) Schranke von A ist, heißt maximales (minimales)Element oder kürzer Maximum(Minimum) von A und wir schreiben:$a=\max A$ ($a=\min A$).

S1.3.1(501) Vor.:Sei K angeordnet und $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$

Beh:1.) $\overleftarrow{s}=\sup T: \Leftrightarrow$ α) $\overleftarrow{s}$ ist obere Schranke von T und

β) $\forall\ \varepsilon>0$ ist $\overleftarrow{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T

$\Leftrightarrow\ \forall\ t\in T: t\le\overleftarrow{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\overleftarrow{s}-\varepsilon$

2.) $\exists \max T \Leftrightarrow \exists \sup T\in K$ und $\sup T\in T$: $\max T=\sup T$

$\exists \min T \Leftrightarrow \exists \inf T\in K$ und $\inf T\in T$: $\min T=\inf T$

3.) $A:=\{x\in R:\ 0\le x<5\}$

4.) $B:=\{\frac{1}{n}: \in N\}$. $\inf >B=0\notin B \Rightarrow \not\exists \max B$

5.) $x\ge0,\ x^2\ge2 \Leftrightarrow x>\sqrt{2}$

6.) Sei $(K,<)$ und $T=\{x\in K\,|\,-1<x\le0\}=(-1,0]$

$\max T=\sup T=0$, $\inf T=-1$, $\min T$ existiert nicht.

7.) $K=R$, $A,B\subset K$, $A,B\neq\emptyset$ und beschränkt.

Z.z $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$

8.) K_+ (d.h.$0\notin K_+$) ist nach unten beschränkt durch $\zeta=0$. Ist $\eta\in K_+$ $\Rightarrow \eta/2\in K_+$ und $\eta/2<\eta$. Also kann kein Element von K_+ gleichzeitig untere Schranke von K_+ sein und deshalb ist 0 die größte untere Schranke von $K_+ \Rightarrow 0=\inf K_+$. $0\notin K_+ \Rightarrow K_+$ besitzt kein Minimum.

K_+ nicht nach oben beschränkt, denn gäbe es eine obere Schranke für K_+, etwa ζ, so wäre sowohl $\zeta\in K_+$ also auch $\zeta+1\in K_+$, und mit $\zeta+1>\zeta$ ergibt sich ein Widerspruch.

9.) Seien $x>0$ und $A_x=\{a>0: a^2\le x\}$.

Falls $\zeta=\sup A_x$ existiert, dann gilt $\zeta^2=x$.

D1.3.2(505)

Ein angeordneter Körper $(K,+,\cdot,<)$ heißt vollständig (bezüglich <):

$\Leftrightarrow\ \forall\ T\subset K$, $T\neq\emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists \sup T\in K$.

Ein angeordneter, vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt Körper der rellen Zahlen R

Bem:siehe auch A1.3.13. $K=(K,+,\cdot,<)$ ist vollständig: $\Leftrightarrow$ Jede nach unten beschränkte Menge $T\subset K$, $T\neq\emptyset$ besitzt ein Infimum $\inf T$ in K

Bew:Sei $T^-:=\{x\in K: -x\in T\}$. Dann gilt für $\underline{s}\in K$:

$\underline{s}$ ist untere Schranke von T $\Leftrightarrow \underline{s}\le t\ \forall\ t\in T \Leftrightarrow$

$x\le-\underline{s}\ \ \forall\ t\in T^- \Leftrightarrow -\underline{s}$ ist obere Schranke von $T^- \Rightarrow \inf T=-\sup T^-$.

K vollständig $\Leftrightarrow \exists \sup T^- \Leftrightarrow \exists \inf T$

D1.3.3(506) Seien $a,b\in R$, $a\le b$, Dann sei

$[a,b]:=\{x\in R|\ a\le x\le b\}$ abgeschlossenes Intervall mit Endpunkten a,b

$(a,b]:=\{x\in\mathbb{R}|\ a<x\leq b\}, a<b$ halboffenes/halbabgeschlossenes Intervall
$[a,b):=\{x\in\mathbb{R}|\ a\leq x<b\}, a<b$ halboffenes/halbabgeschlossenes Intervall
$(a,b):=\{x\in\mathbb{R}|\ a<x<b\}, a<b$ offenes Intervall
$(-\infty,b]:=\{x\in\mathbb{R}|\ x\leq b\}$, $(-\infty,b):=\{x\in\mathbb{R}|\ x<b\}$
$[a,\infty):=\{x\in\mathbb{R}|\ x\geq a\}$, $(a,\infty):=\{x\in\mathbb{R}|\ x>a\}$
$(-\infty,\infty):=\mathbb{R}$ unbeschränkte Intervalle
Aus dem Zusammenhang muß sich ergeben, ob (a,b) offenes Intervall oder Paar von a und b ist.

S1.3.2(515)
Vor:Sei $x\geq 0, x\in\mathbb{R}$.
Beh:$\exists$ genau ein $y\in\mathbb{R}$ mit $y\geq 0$ und $y^2=x$
($y=:\sqrt{x}$ Quadratwurzel aus x)

Bem:
1.) Sei $[0,\infty)=\{x\in\mathbb{R}|0\leq x\}$, dann ist $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ definiert durch
$x \mapsto f(x)=x^2$ eine Bijektion mit Umkehrfunktion $(0\leq x_1\leq x_2 \Rightarrow x_1^2\leq x_2^2)$
injektiv $f^{-1}: [0,\infty)\to[0,\infty)\ x\mapsto\sqrt{x}$
$f: \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto x^2$ ist bij, d.h. $\exists$ Umkehrfunktion $f^{-1}:(y)=\sqrt{y}$
Quadratwurzelfunktion
2.) α) $a,b\geq 0 \Rightarrow \sqrt{a}\ \sqrt{b}=\sqrt{ab}$
β) $0\leq a<b \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$
γ) $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=|a|$
3.) Die Funktion $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto x^2$ ist bijektiv,
d.h. $\exists$ Umkehrfunktion $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$ (Wurzelfunktion)

D1.3.4 Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d: X\mathrm{x}X\to\mathbb{R}$, heißt Metrik auf X, wenn für beliebige $x,y,z\in X$, die folgenden Axiome erfüllt sind:
1.) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2.) Symmetrie: $d(x,y)=d(y,x)$
3.) Dreiecksungleichung: $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

S1.3.3 Positive Definitheit
$d: X\mathrm{x}X\to\mathbb{R} \Rightarrow d(x,y)\geq 0$

D1.3.5 (516)
(X,d) heißt metrischer Raum, wenn d eine Metrik auf X ist. (Manche Autoren fordern zusätzlich, dass $X\neq\emptyset$.
In der Praxis bezeichnet man zumeist X allein als den metrischen Raum, wenn aus dem Kontext klar ist, dass in diesem Raum die Metrik d benutzt wird.)
Eine Abbildung vom Raum in sich selbst heißt Isometrie, sofern sie die Metrik erhält. Figuren, die von einer Isometrie aufeinander abgebildet werden können, heißen kongruent zueinander.

1.4(600) Funktionenräume, gerade/ungerade Funktionen, monotone Funktionen

D1.4.1(600) Funktionenräume

Sei $D \neq \emptyset$. Für Abbildungen $f,g:D \to \mathbb{K}$ seien $f+g$, $f * g:D \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$\forall\ x \in D: \begin{cases} (f+g)(x)=f(x)+g(x) \\ (f*g)(x)=f(x)*g(x) \end{cases}$$

Es liegt nahe, eine Zahl α mit der konstanten Funktion $f(x)=\alpha$ $\forall\ x \in D$ zu identifizieren, so daß auch $\alpha * g$ definiert ist. Damit wird die Menge aller Funktionen von D nach $\mathbb{K}$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Ein beliebiger Teilraum dieses Vektorraums heißt dann ein Funktionenraum auf D.

Ein $f:D \to \mathbb{K}$ heißt gerade bzw ungerade, falls $D \subset \mathbb{K}$ ist mit $x \in D \Rightarrow -x \in D$ und falls $f(x)=f(-x)$ bzw $f(x)=-f(-x)$ $\forall\ x \in D$ gilt.

Für $f:D \to \mathbb{K}$ sei $|f|:D \to \mathbb{R}$ definiert durch $|f|(x)=|f(x)|$ $\forall\ x \in D$. Wir nennen f beschränkt, falls ein $K \in \mathbb{R}_+$ existiert mit $|f(x)| \leq K$ $\forall\ x \in D$.

D1.4.2(600) Für $f:D \to \mathbb{R}$ seien $|f|$, f^+, f^- definiert als $|f|(x)=|f(x)|$, $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$, $f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$ $\forall\ x \in D$.

Für $f,g:D \to \mathbb{R}$ schreiben wir $f \leq g$ falls $f(x) \leq g(x)$ $\forall\ x \in D$ gilt. Wir nennen f nach oben beschränkt, falls ein $K \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $f(x) \leq K$ $\forall\ x \in D$. Analog heißt f nach unten beschränkt, falls $-f$ nach oben beschränkt ist. Falls beides gilt, ist f offenbar beschränkt im oben definierten Sinn.

Folgendes erst nach D1.3.1 lesen, siehe Hinweis dort.

Wir schreiben auch $\sup_{x \in D} f(x)$ statt $\sup f(D)$, und entsprechend $\inf_{x \in D} f(x)$, $\max_{x \in D} f(x)$, $\min_{x \in D} f(x)$, falls letztere existieren.

D1.4.3(601) Monotone Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f:D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt(auf D) monoton Wachsend $\nearrow$ (fallend $\searrow$), falls $x,y \in D$, $x<y \Rightarrow$ $f(x) \leq f(y)$, $(f(x) \geq f(y))$.

Falls sogar immer $f(x)<f(y)$, $(f(x)>f(y))$ gilt, heißt f streng monoton wachsend$\uparrow$ (bzw. fallend $\downarrow$). Beachte, dass streng monotone Funktionen immer injektiv sind.

1.5(700) Die natürlichen Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion

D1.5.1(700)

1.) Eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv:$\Leftrightarrow$

α) $1 \in T$ und β) $t \in T \Rightarrow t+1 \in T$ $\forall\ t \in \mathbb{R}$ $(t+1 \in T\ \forall\ t \in T)$

2.) Sei I die Menge aller induktiven Teilmengen T von $\mathbb{R}$ $(I \subset (\mathcal{P}(\mathbb{R}))$, dann heißt $\mathbb{N} := \bigcap_{T \in I} T$ die Menge der natürlichen Zahlen.

Bem: $\mathbb{R} \in I \Rightarrow I \neq \emptyset$ (siehe Körperaxiome)

Eigenschaften von $\mathbb{N}$:

1.) $\mathbb{N}$ ist induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$

2.) (.) $\mathbb{N}$ ist in jeder induktiven Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthalten $\Rightarrow$
(..) $\mathbb{N}$ ist kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$

Bem:1.) $0 \notin \mathbb{N}$, da mit T auch $0 \notin T \cap [1,\infty)$ eine induktive Menge ist, $([1,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x\})$ und $\mathbb{N} \subset T \cap [1,\infty)$, $0 \notin [1,\infty)$ gilt) und damit $0 \notin \bigcap_{T \in I} T =: \mathbb{N}$

#1.)$0\notin\mathbf{N}$, da mit T auch $\underbrace{T}_{0\notin}\cap[1,\infty)$ eine induktive Menge ist,

$([1,\infty):=\{x\in\mathbf{R}\mid 1\le x\})$ und $\mathbf{N}\subset T\cap[1,\infty)$, $0\notin[1,\infty)$ gilt) und damit

$0\notin \bigcap_{T\in I} T=:\mathbf{N}$

Bez: $\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$ ist induktiv und heißt die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen

Sei $A\subset\mathbf{N}$ so, daß $1\in A$ und der Schluss $x\in A\Rightarrow x+1\in A$ richtig sind (mit anderen Worten :A ist induktiv). Dann folgt bereits $A=\mathbf{N}$

Beh:a) $x<1\Rightarrow x\notin\mathbf{N}$
b) $n\in\mathbf{N}$, $n<x<n+1\Rightarrow x\notin\mathbf{N}$

S1.5.1(702) Prinzip der vollständigen Induktion
Vor. $\forall\ n\in\mathbf{N}$ sei $A_{(n)}$ eine von n abhängige Aussage gegeben und es gelte
1.)"$A_{(1)}$ ist wahr" (Induktionsanfang: IAnf) und
2.)$\forall\ n\in\mathbf{N}$ (beliebige $n\in\mathbf{N}$) folgt aus „$\underbrace{A_{(n)}\textit{ist wahr}}_{IndHyp:\,IHyp}$" auch

„$\underbrace{A_{(n+1)}\textit{ ist wahr}}_{IndAussage:\,IAuss}$" so gilt: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall n\in\mathbf{N}$

$\forall\ n\in\mathbf{N}$ gilt $\underbrace{\big(\underbrace{A_{(n)}}_{IH}\Rightarrow\ \underbrace{A_{(n+1)}}_{Induktionsbehauptung}\big)}_{Induktionsschluss\,(IS)\,n\Rightarrow n+1}$ ist wahr

Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall\ n\in\mathbf{N}$

andere Formulierung

Geg sei Aussage A(n), welche für $\forall\ n\in\mathbf{N}$ sinnvoll ist. Wir sagen, daß wir A(n) durch vollständige Induktion beweisen, wenn wir nach folgendem Schema vorgehen:
a) Wir zeigen die Richtigkeit von A(1) (Induktionsanfang)
b) Sei jetzt $n\in\mathbf{N}$ beliebig gegeben. Unter der Induktionshypothese, d.i. die Annahme der Richtigkeit von A(n), oder auch die Annahme der Richtigkeit von A(m) $\forall\ m\in\mathbf{N}$ mit $m\le n$, zeigen wir die Richtigkeit von A(n+1)(Schluss von n auf n+1, oder Induktionsschritt).
Ist dies gelungen, so ist die Menge der $n\in\mathbf{N}$, für die A(n) richtig ist, eine induktive Menge und aus dem Induktionsprinzip folgt, dass A(n) für alle $n\in\mathbf{N}$ richtig ist.
Beachte aber, dass ein Beweis durch vollständige Induktion nur dann möglich ist, wenn die zu zeigende Aussage schon bekannt ist.

Beachte noch, dass beim Beweisen durch vollständige Induktion der Induktionsanfang nicht unbedingt 1 sein muss, sondern im Allgemeinen sogar eine beliebige reelle Zahl sein kann, dies ergibt sich durch Betrachten der a-induktiven Mengen (A1.5.1-A1.5.3)

Das Induktionsprinzip kann auch zur Definition von Größen $\alpha(n), n \in \mathbb{N}$, benutzt werden, indem man

(.) $\alpha(1)$ durch eine Vorschrift definiert

(..) Wenn man $\alpha(1)\ldots\alpha(n)$ definiert hat, eine Vorschrift F angibt, mit der man $\alpha(n+1)=F(\alpha(1)\ldots\alpha(n),n)$????

Durch ein solches Vorgehen ist $\alpha(n)$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ eindeutig definiert

S1.5.2(703)

Rechenregeln in $\mathbb{N}$: $\forall$ $m,n \in \mathbb{N}$ gilt

1.) $n \geq 1$ (also $1=\min \mathbb{N}$)

2.) $n \neq 1 \Rightarrow \exists$ $k \in \mathbb{N}$: $n=k+1$, d.h. $n-1 \in \mathbb{N}$

3.) $m+n \in \mathbb{N}$, d.h. $\mathbb{N}$ ist abgeschlossen bzgl Addition

4.) $m*n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N}$ ist abgeschlossen bzgl Multiplikation

5.) $m-n \in \mathbb{N}$ wenn $n<m$

6.) $m>n \Rightarrow m \geq n+1 \Rightarrow$ Es gibt keine natürliche Zahl zwischen n und n+1 ($n \neq m \Rightarrow |n-m| \geq 1$)

Bez: n+1 heißt Nachfolger von $n \in \mathbb{N}$ (n der Vorgänger von n+1).

Schreibweise: $\mathbb{N}=\{1,2,3....\}$, $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3...\}$, wobei 3=2+1, 4=3+1 usw

S1.5.3(705) Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung

Vor: $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ seien Aussagen $A_{(n)}$ gegeben und es gelte

1.) $A_{(1)}$ ist wahr

2.) $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ ist ($A_{(m)}$ $\forall$ $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n \Rightarrow A_{(n+1)}$) ist wahr

$A_{(1)}$ und $A_{(2)}$ ….und $A_{(n)}$

Andere Formulierung Vor:

Aus „$A_{(m)}$ ist wahr" $\forall$ $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$ folgt stets „$A_{(n+1)}$ ist wahr", so gilt:

Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall$ $n \in \mathbb{N}$

Bem: Induktion kann auch bei $n_0 \in \mathbb{N}$ beginnen $B_{(n)}:=A_{(n_0+n-1)}$

Will man zeigen, dass gilt „$A_{(n)}$ ist wahr $\forall$ $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq n_0$, und einem $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so kann man das Prinzip der vollständigen Induktion benutzen mit Ianf: $A_{(n_0)}$ ist wahr.

Verkürzte Darstellung/Gegenüberstellung 1., 2. Fassung:

$A_{(1)}$ ist wahr

$A_{(n)}$ ist wahr $\Rightarrow$ ($A_{(n+1)}$) ist wahr | $A_{(m)}$) ist wahr $\forall$ $m \in \{1,2,...n\}$

| $\Rightarrow A_{(n)}$ ist wahr

S1.5.4(707) Archimedisches Prinzip

$\forall$ $a \in \mathbb{R}$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$: $a<n$ (d.h. $\mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ nach oben nicht beschränkt)

Bem: 1.) $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n<\varepsilon$ (Prinzip des Eudoxos) $\Leftrightarrow$ Archimedisches Prinzip

2.) Für $a \in \mathbb{R}$ gilt $a=0 \Leftrightarrow |a|<1/n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ (vgl S1.2.1 (406))

$a=0 \Leftrightarrow |a|<\varepsilon$ $\forall \varepsilon \in K$ mit $\varepsilon>0$ 3.) $\forall$ $a,b>0$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$: $na>b$

S1.5.5(707) Wohlordnungssatz

Vor: $M \subset \mathbb{N}$ und $M \neq \emptyset$ Beh: $\exists$ $\min M$

S1.5.5' (709) Jede nach oben beschränkte nichtleere Menge M ganzer Zahlen besitzt ein Maximales Element

D1.5.2 (711)
In einem Körper K seien Elemente $a, a_1, a_2, \dots a_n \in K$ für ein $n \in \mathbb{N}$ eindeutig gegeben. Dann definieren wir

(.) Die Summe $\sum_{v=1}^{n} a_v$ durch $\begin{cases} \sum_{v=1}^{0} a_v := 0 \\ \sum_{v=1}^{1} a_v := a_1 \\ \sum_{v=1}^{m+1} a_v := a_{m+1} + \sum_{v=1}^{m} a_v,\ 1 \le m \le n-1 \end{cases}$

Bem: Die Assoziativgesetze besagen: Klammern sind nicht nötig

Andere Formulierung:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} 0,\ \textit{falls}\ n<m \\ a_m,\ \textit{falls}\ n=m \\ \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n,\ \textit{falls}\ m+1 \le n \end{cases}$$

(..) Das Produkt $\prod_{j=1}^{n} a_j$ durch $\begin{cases} \prod_{j=1}^{0} a_j := 1 \\ \prod_{j=1}^{m+1} a_j := \left(\prod_{j=1}^{m} a_j\right) \cdot a_{m+1},\ 0 \le m \le n-1 \end{cases}$

Andere Formulierung:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} 1,\ \textit{falls}\ n<m \\ a_m,\ \textit{falls}\ n=m \\ \prod_{k=m}^{n-1} a_k * a_n,\ \textit{falls}\ m+1 \ge n \end{cases}$$

Motivation $\log(a_m * a_{m+1} * \dots * a_n) = \sum_{k=m}^{n} \log a_k)$

(...) Die Potenzen a^n durch $a^n = a * a^{n-1}$.

Für die Potenzen gelten die üblichen Rechenregeln.
Bew durch Induktion
n-faches von a : $n*a$, $\underbrace{1}_{\in R} * a := a$, $(m+1)a := a + ma$, $1 \le m \le n-1$, $\underbrace{0}_{\in R} * a = 0 \in K$
nte Potenz von a: a^n, $a^1 := a$, $a^{m+1} = a * a^m$, $1 \le m \le n-1$,
neutrales Element $a \in K \to a^0 = 1 \in K$ (auch für $a = 0 \in K$)

Bem: 1.) Satz 1.5.4 ⇒ obige Summen und Produkte sind ∀ $n \in \mathbb{N}$ eindeutig (rekursiv) definiert
2.) Aus (A1),(M1) folgt mit Induktion, dass n-fache Summen und Produkte unabhängig von der Klammersetzung sind
$\sum_{v=1}^{n} a_v = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $\prod_{v=1}^{n} a_v = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.

#3.) m>n: $\dfrac{\overbrace{a*a*a*\ldots*a}^{m\ mal}}{\underbrace{a*a*\ldots.*a}_{n}}=a^{m-n}$,

\# m=n: $a^{m-n}=a^{m-m}=a^0=1$,

\# m=1: $\dfrac{1}{a^n}=\dfrac{1}{\underbrace{a*a*\ldots.*a}_{n}}=\dfrac{a^0}{\underbrace{a*a*\ldots.*a}_{n}}=a^{0-n}=a^{-n}$

\# m<n: $\dfrac{\overbrace{a*a*\ldots*a}^{m\ mal}}{\underbrace{a*a*a*\ldots.*a}_{n}}=\dfrac{1}{\underbrace{a*a*\ldots.*a}_{n-m}}=\dfrac{1}{a^{n-m}}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-m}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-(m-n)}=\dfrac{a^0}{\underbrace{a*a*\ldots.*a}_{n-m}}=$

\# $a^{0-(n-m)}=a^{0-(n-m)}=a^{\overbrace{m-n}^{<0}}$ usw Grundlagen Algebra

Andere Formulierungen:
Sind n reelle oder komplexe Zahlen $a_1,\ldots\ a_n$ gegeben, so bezeichnet im Folgenden $\sum_{j=1}^{n} a_j$ immer die Summe und $\prod_{j=1}^{n} a_j$ ihr Produkt. Sinngemäß schreiben wir Summen und Produkte von Zahlen, deren Nummerierung nicht bei 1, sondern bei 0 beginnt. Falls $n\leq 0$ ist, soll immer $\sum_{j=1}^{n} a_j=0$ und $\prod_{j=1}^{n} a_j=1$ gelten. Man sagt: Eine leere Summe ist gleich 0, ein leeres Produkt gleich 1.
Allgemeiner: Ist J eine endliche Indexmenge und ist $f:J\rightarrow \mathbb{K}$,
j $f(j)=f_j$, eine beliebige Abb, so schreiben wir $\sum_{j\in J} f_j$ für die Summe der Zahlen f_j (und analog für das Produkt). Wegen der Kommutativität der Addition ist es dabei unerheblich, in welcher Reihenfolge wir die Zahlen addieren.
Ist etwa $J=\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}$, so ist $j\in J$ ein Zahlenpaar (i,k) und wir schreiben f_{ik} statt $f_{(ik)}$.Die Summe dieser Zahlen ist dann eine sogenannte Doppelsumme und wegen des Kommutativ- und Assoziativgesetzes gilt $\sum_{(i,k)\in J} f_{ik}=$
$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} f_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} f_{ik}\right)$
Entsprechendes gilt auch für Produkte.
Bem: $a_{\nu\mu}$ ($m_1\leq\nu\leq n_1$, $m_2\leq\nu\leq n_2$) $m_1=m_2=1$ $n_1,n_2\in\mathbb{N}$.

$a_{11}\quad a_{12}\ \ldots\ldots.\ a_{1n_2}$

$a_{21}\quad \ldots..\quad \ldots a_{2n_2}$

$\ldots\quad \ldots.\quad \ldots..$

$a_{n_1 1}\quad \ldots..\quad \ldots a_{n_1 n_2}$

$$\sum_{\nu=m_1}^{n_1}\sum_{\mu=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu}=:\sum_{\nu=m_1}^{n_1} b_\nu,\quad \sum_{\nu=m_1}^{n_1} b_\nu=\sum_{\mu=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu}.$$
$$=\sum_{\mu=m_2}^{n_2}\sum_{\nu=m_1}^{n_1} a_{\nu\mu}$$

---

a_{11}

$a_{21} \quad a_{22}$

$a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}$

……. ……. . …….

. . . .

$a_{n1} \quad a_{n2} \quad a_{n3}$ …………………….. a_{nn}

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\nu\mu} = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=\mu}^{n} a_{\nu\mu}.$$

$1 \le \nu \le n$

$1 \le \mu \le \nu$

1.6(800) **Die komplexen Zahlen**

Es soll ein $\mathbb{R}$ umfassender Körper konstruiert werden, in dem die Gleichung $x^2+1=0$ lösbar ist.

D1.6.1(800)

Die Menge $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ mit Verknüpfungen

$+:(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2:(x_1,y_1)+(x_2,y_2) \quad (x_1+x_2)+(y_1+y_2)$

$\ast:(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \ :(x_1,y_1)\ast(x_2,y_2) \quad (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$

heißt Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}=\{z\mid z=(x,y) \text{ mit } x,y\in\mathbb{R}\}$

Beachte $z_1=(x_1,y_1)=(x_2,y_2)=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ und $y_1=y_2$ siehe D0.1.2 oder

Die Menge aller Punkte $z=(x,y)^T\in\mathbb{R}$, zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1x_2-y_1y_2\\x_1y_2+x_2y_1\end{pmatrix}$$

heißt Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, oder die komplexe Zahlenebene.

S1.6.1(800)

1.) $(\mathbb{C},+,\ast)$ ist ein Körper

2.) $\mathbb{C}_\mathbb{R}:=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, der zu $\mathbb{R}$ isomorph ist.
$\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{C}_\mathbb{R}$ definiert durch $x \quad (x,0)$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}_\mathbb{R}$, (d.h. φ ist bijektiv mit
$\varphi(x_1+x_2)= \varphi(x_1)+\varphi(x_2),\ \varphi(x_1\ast x_2)= \varphi(x_1)\ast\varphi(x_2) \quad \forall\ x_1,x_2\in\mathbb{R}$)

3.) Für imaginäre Einheit $i:=(0,1)$ gilt
$i^2=i\ast i=(0,1)*(0,1)=(0*0-1*1,0*1+1*0)=(-1,0)=-1\in\mathbb{R}$

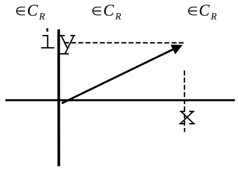
4.) $z=(0,1)$ erfüllt $z^2=(-1,0)$

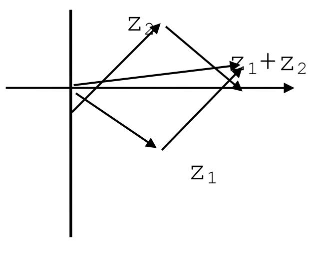
5.) $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden, da $i^2=-1<0$, Widerspruch zu ^{2} muß >0 sein

Kartesische Schreibweise der komplexen Zahlen

$z\in\mathbb{C},\ z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=\underbrace{(x,0)}_{\in C_R}\ \underbrace{(1,0)}_{\in C_R}+\underbrace{(y,0)}_{\in C_R}\ \underbrace{(0,1)}_{=i}$

$z=(x,y)=(x,0)\ast 1+(y,0)i$
$=x\ast 1+yi=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$





Bezeichnungen:Sei $z=x+iy$ $x,y\in\mathbb{R}$ $i^2=-1$

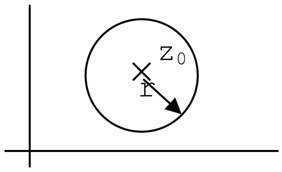
1.) $x:=\operatorname{Re} z$ Realteil von z

2.) $y:=\operatorname{Im} z$ Imaginärteil von z

3.) $\overline{z}:=x-iy$ die zu z konjungierte komplexe Zahl

4.) $|z|:=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$ Betrag von z=Abstand von z zum 0 Punkt

5.) $U_r(z_0):=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<r\}$ ist eine Kreisscheibe um $z_0\in\mathbb{C}$ mit Radius r(>0)



Für $z=x+iy\in\mathbb{C}$ gilt immer $(|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0)$

$$\max\{|x|,|y|\}\leq |z|=\sqrt{x^2+y^2}\leq\sqrt{2\max\{x^2,y^2\}}\leq\sqrt{2\max\{|x|,|y|\}^2}\leq \sqrt{2}\max\{|x|,|y|\}\leq\sqrt{2}\,(\underbrace{|x|+|y|}_{\geq\max\{|x|,|y|\}})$$

Beachte, dass die obige Definition des Betrags einer komplexen Zahl im Falle y=0 (also $z\in\mathbb{R}$) mit der früheren Definition des Betrags der reellen Zahl übereinstimmt.
Die komplexen Zahlen werden als Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ identifiziert.
Gaußsche Zahlenebene.
$\mathbb{C}$ läßt sich nicht anordnen, sonst wäre $\forall\ z\neq 0,\ z^2>0$, obwohl $i^2=-1$ Widerspruch!
Da sich $\mathbb{C}$ nicht anordnen lässt, ist es sinnlos, Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen zu betrachten. Allerdings kann man Ungleichungen untersuchen, in denen nur Beträge komplexer Zahlen auftreten. Z.B. gelten die Dreiecksungleichungen auch für Beträge komplexer Zahlen.

(801)Eigenschaften der komplexen Zahlen

Für $z,z_1,z_2\in\mathbb{C}$ gilt

1.) $\operatorname{Re} z=1/2(z+\overline{z})$ $\operatorname{Im} z=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=\frac{i}{2}(\overline{z}-z)$ da $i^2=-1$, $1/i=-i$

$\left.\begin{matrix} z=x+iy\\ \overline{z}=x-iy\end{matrix}\right\}$ $z+\overline{z}=2x$, $z-\overline{z}=2iy$ $(y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=-\frac{-i}{2}(z-\overline{z})$

2.) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$

3.) $\overline{\overline{z}}=z$, $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ mit $z_2\neq 0$,

$\overline{z_1 z_2}=\overline{(x_1+iy_1)*(x_2+iy_2)}=\overline{x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2)}=$
$x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+y_1x_2)=(x_1-iy_1)*(x_2-iy_2)=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

#Nach 5.) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\underbrace{=}_{S1.6.1}\overline{\left(z_1\frac{1}{z_2}\right)}=\overline{z_1}\ \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}\ \overline{z_1}\underbrace{=}_{5.)}\frac{1}{\overline{z_2}}\underbrace{=}_{S1.6.1}\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

$\overline{z_1+z_2}=\overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}=\overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)=$
$(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

$\overline{z_1-z_2}=\overline{(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)}=\overline{(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)}=(x_1-x_2)-i(y_1-y_2)=$
$(x_1-iy_1)-(x_2-iy_2)=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

4.) $z=x+iy$, $|x|=|\mathrm{Re}\, z|=\sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2}=|z|$, $|y|=|\mathrm{Im}\, z|=\sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2}=|z|$

5.) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{x+iy}\right)} = \overline{\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{1}{x-iy} = \frac{1}{\bar z}$

S1.6.2(802)
Vor. Sei $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dann
1.) $|z|=\sqrt{z\cdot\bar z}$ $\quad |z|=|-z|\ge 0$ $\forall$ $z\in\mathbb{C}$ und $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$, $|z|=|\bar z|=\sqrt{z\bar z}$
2.) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ falls $z_2\neq 0$
3.) Δ Ungleichung
$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$, $|z_1|-|z_2|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$,
$|z_1\pm z_2|\ge||z_1|-|z_2||\ge|z_1|-|z_2|$
„=„ gilt $\Leftrightarrow$ $z_2=\lambda z_1$ oder $z_1=\lambda \overline{z_2}$ $\lambda\ge 0$

Bem: 1.) $\mathrm{Re}\, z\le|\mathrm{Re}\, z|\le|z|\le|\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|$,
$\mathrm{Im}\, z\le|\mathrm{Im}\, z|\le|z|\le|\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|$,
2.) $z=x+iy \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\le|x| \\ y\le|y|\end{matrix}\right\} \le|z|\le|x|+|y|$ *da $(x^2+y^2)\le(|x|+|y|)^2$
3.) $z=x+iy\neq 0$, $1/z=z^{-1}=\frac{\bar z}{z\bar z}=\frac{\bar z}{|z|^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$
4.) der Betrag für $z\in\mathbb{R}$ stimmt mit dem reellen Betrag überein

D1.6.2(803)
Für $z\in\mathbb{C}$: $z^0:=1$, $z^1:=z$, $z^{n+1}:=z*z^n$, $z^{-n}:=(1/z)^n$ $(n\in\mathbb{N}, z\neq 0)$

S1.6.3(803)
Für $z\in K$ (Körper) und $n\in\mathbb{Z}$ sei für $-n\in\mathbb{N}$ $nz:=(-n)(-z)$ und, falls $z\neq 0$,
$z^n:=(z^{-1})^{-n}=(1/z)^{-n}$ $\forall$ $n,m\in\mathbb{Z}$ und $z\in K$ gilt
$nz+mz=(n+m)z$, $m(nz)=(mn)z$, $nz+nw=n(z+w)$, ($z,w\neq 0$, falls $n,m<0$)
(.) $z^nz^m=z^{n+m}$
(..) $(z^n)^m=z^{mn}$
(...) $(zw)^n=z^nw^n$, $z,w\neq 0$ für $n,m<0$

D1.5.3 (750)
Sei M eine beliebige Menge, dann heißt
1.) M endlich: $\Leftrightarrow$ $M=\emptyset$ oder $\exists$ $m\in\mathbb{N}$ und $\exists$ eine bijektive Abbildung
$f:\{1,2,3,...,m\}=\{n\in\mathbb{N}|1\le n\le m\}\to M$, dann heißt m die Elementeanzahl von M, $m=|M|$, $(|\emptyset|=0)$.
Mit $a_n:=f(n)$, $1\le n\le m$ ist $M=\{a_1,a_2,a_3,...,a_m\}$ mit $a_n=f^{-1}(n)$, $1\le n\le m$
2.) M unendlich: $\Leftrightarrow$ M ist nicht endlich ($|M|:=\infty$)
3.) M abzählbar: $\Leftrightarrow$ $\exists$ eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{N}\to M$
(d.h. $M=\{a_n:=f(n)|n\in\mathbb{N}\}$
4.) Eine Menge heißt abzählbar unendlich, falls es eine bij Abb $f: \mathbb{N}\to M$ gibt
5.) M höchstens abzählbar: $\Leftrightarrow$ M ist endlich oder abzählbar unendlich
6.) M überabzählbar: $\Leftrightarrow$ $|M|=\infty$ und M ist nicht höchstens abzählbar
7.) Eine Abbildung $f: \mathbb{N}\to M\neq\emptyset$ eine Folge aus M: (a_n) oder besser $(a_n)_{n=1}^{\infty}\subset M$ mit $a_n=f(n)$, $n\in\mathbb{N}$..
8.) 2 Mengen heißen gleich mächtig, wenn eine Bijektion zwischen den beiden Mengen gilt.
Bem: 1.) Abzählbarkeit bedeutet gleichmächtig wie $\mathbb{N}$.
2.) Eine Menge M ist höchstens abzählbar bedeutet:

$\exists$ injektive Abb $\varphi: M \to \mathbb{N}$

S1.5.7 (750)Teilmengen von abzählbar (unendlichen) Mengen sind höchstens abzählbar

S1.5.8(751)Eine unendliche Menge besitzt eine abzählbar unendliche Teilmenge
#Damit ist ja nicht gesagt, dass es keine anderen Teilmengen gibt.

S1.5.9(751)Das kartesische Produkt zweier abzählbar (unendlicher) Mengen ist wieder abzählbar (unendlich).

S1.5.10(752) Seien A_n höchstens abzählbare Mengen $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Vereinigung $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ höchstens abzählbar.
Bem:a) M ist höchstens abzählbar bedeutet: $\exists$ injektive Abb $\varphi: M \to N$

α) Sind A_k paarweise disjunkt, so ist die Abb $\varphi: a_k \to (k,\ )$ abzählbar nach **S1.5.8**
$A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ im Allgemeinen nicht surjektiv, aber injektiv $\underset{Bem}{\Rightarrow}$
A höchstens abzählbar

β) Sind A_k nicht paarweise disjunkt, so $B_1 := A_1$, $B_2 := A_1 \backslash B_1$, $B_3 := A_3 \backslash (B_1 \cup B_2)$, usw ...$B_k$ paarweise disjunkt
$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = {}_{k=1}^{\infty} B_k$

b) $|M_1| = n, |M_2| = m \Rightarrow |M_1 x M_2| = nm$

S1.5.11(752)Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich

S1.5.12(752)Falls A mindestens 2 Elemente hat, also etwa {0,1}, dann ist die Menge aller Folgen in A überabzählbar.
Bem:Wie wir später sehen werden, folgt aus obigem Satz, daß die Menge der reellen Zahlen in einem beliebig kleinen Intervall [a,b] mit a<b immer überabzählbar ist. Da ein solches Intervall nur abzählbar viele rationale Zahlen enthält, ist sogar die Menge der irrationalen Zahlen in [a,b] überabzählbar.

S1.5.13(758) Vor:$M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und M endlich
Beh:M besitzt ein Minimum und ein Maximum
Bem:$|\mathbb{N}| = \infty$ unbeschränkt, andernfalls $\exists\ m = \max \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ und $m+1 \in \mathbb{N}$ Widerspruch

D1.5.4(758)

1.) Die Teilmenge von $\mathbb{R}$: $\mathbb{Z} = \{a \in \mathbb{R} | a \in \mathbb{N}_0$ oder $-a \in \mathbb{N}\}$ heißt Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$
2.) Die Teilmenge von $\mathbb{R}$:$\mathbb{Q} = \{p/q \in \mathbb{R} | p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z}/\{0\}\}$, heißt Menge der rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$
3.) Die Teilmenge von $\mathbb{R}$:$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ heißt die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{R}$ (z.B. $\sqrt{2}$)
4.) $\overline{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
5.) $\forall\ x \in \mathbb{R}: -\infty < x < \infty$
6.) $-\infty = (-1)\infty$
7.) $\forall\ x \in \mathbb{R}: \infty + x = \infty$

8.) $\forall\ x \in \mathbb{R}_+ : \infty x = \infty$

$\infty * x = \begin{cases} \infty \text{ falls } x > 0 \\ -\infty \text{ falls } x < 0 \end{cases}$, $0*\infty$ nicht definiert

9.) $\infty+\infty=\infty$, $-\infty+(-\infty)=-\infty$, $\infty*\infty=\infty$, $(-\infty)*\infty=-\infty$, $(-\infty)*(-\infty)=\infty$

10.) $\frac{x}{\pm\infty}:=0 \quad \forall \ x\in\mathbb{R}$.

11.) $\overline{\overline{R}}$ ist kein Körper (siehe nicht Definiertes)

Bem zu 1.),2.)
Für die Elemente von Z und Q ist in natürlicher Weise eine Addition und eine Multiplikation definiert, denn diese Operationen sind für alle reellen Zahlen definiert, also auch für die Elemente einer Teilmenge. Fraglich ist höchstens, ob das Ergebnis dieser Operationen wieder zur Menge gehört; dies ist im folgenden enthalten:

Andere Formulierungen zu 1. und 2.):

Z und Q sind abgeschlossen bzgl Addition und Multiplikation, d.h. für a,b∈ Z(∈ Q) sind auch a+b, ab∈ Z(∈Q). Ferner gelten in Z die Axiome (A1)-(A4) sowie (M1),(M2),M(4),(D) und man nennt Z deshalb einen kommutativen Ring mit Einselement. In Q gelten alle Axiome eines Körpers. Man nennt Q auch den Quotientenkörper von Z.

Bem zu 4.)-9.)
Es gilt das Kommutativgesetz.Distributivgesetz und Assoziativgesetze gelten, soweit bei der Anwendung keine undefinierten Ausdrücke entstehen. Beachten: $\infty+(-\infty)$ und $0*\infty$ sind hier nicht definiert.

S1.5.14(760)
1.) ∀ m,n∈Z ist m±n, m·n∈Z (Z,+) ist Abelsche Gruppe
2.) (Q,+,*,<) ist ein angeordneter Körper (Unterkörper von R), der nicht vollständig ist (echt in R enthalten ist)
3.) N, Z, Q sind abzählbar, R und R\Q sind überabzählbar

S1.5.17: Jedes x∈(0,1] lässt sich eindeutig als unendlicher Dezimalbruch darstellen: $x=0,a_1a_2a_3a_4...$ mit $a_\nu=\{0,1,2,3,...,9\}$ ∀ ν∈N.

S1.5.15(759)
1.) ∀ a∈R ∃ das größte Ganze von a, d.h. ∃ [a]∈Z mit $[a]\le a<[a]+1$, $[a]:=\max\{n\in Z \mid n\le a\}$
2.) ∀a,b∈R,a<b (.) ∃ q∈Q mit a<q<b und (..) ∃ d∈R\ Q mit a<d<b

Andere Formulierung:
Zwischen 2 bel reellen Zahlen liegt immer eine rationale Zahl
3.) Zwischen 2 bel rationalen Zahlen liegt immer eine irrationale Zahl
Andere Formulierung:
Vorbetrachtung: $\sqrt{2}\in R\setminus Q$. Annahme $\sqrt{2}=p/q$, p,q∈N teilerfremd, $p^2/q^2=2$, $p^2=2q^2$ ⇒ 2 teilt p, d.h. p=2p' ⇒
#4.) ρ,ε∈R, ∀ ε>0 ∃ r∈Q: ρ-ε<r<ρ+ε, d.h. r liegt zwischen ρ-ε und ρ+ε.
#5.) ρ∈R, ∃ eine Folge $(r_n)\in Q$, $r_n \nearrow$ oder $\searrow$: $\lim_{n\to\infty} r_n=\rho$

S1.5.16(764) **(**Division mit Rest)
∀ p∈Z und n∈N ∃ eindeutig bestimmte Zahlen q∈Z und r∈{0,...,n-1} mit p=nq+r

Andere Formulierung, jedoch mit Einschränkung auf $\mathbb{N}$:
Sei $m\in\mathbb{N}$ fest. $\forall\ n\in\mathbb{N}\ \exists\ q,r\in\mathbb{N}_0$ mit $n=qm+r$ & $0\le r<m$ und q,r sind eindeutig bestimmt.

S1.5.17(764) (g-Adische Zahlendarstellung)

Sei $g\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Dann gibt es für alle $n\in\mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Zahlen $p\in\mathbb{N}_0$ und $z_k\in\{0,1,...,g-1\}$ mit $0\le k\le p$, sodass $n=z_0+z_1g+...z_pg^p$, $z_p\ne0$.

Andere Formulierung:

Es sei $g\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ fest gegeben. Dann gilt für jede natürliche Zahl n: $n=\sum\limits_{\nu=0}^{p}\alpha_\nu g^\nu$ mit $p:=\max\{\nu\in\mathbb{N}_0: g^\nu\le n\}$, $\alpha_\nu\in\{0,1,...,g-1\}$

D1.5.5(766) Seien $a,b\in\mathbb{R}$, $a\le b$

$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le b\}$ abgeschlossenes Intervall
$[a,b):=\{x\in\mathbb{R}: a\le x<b\}$ halboffenes Intervall
$(a,b]:=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$ halboffenes Intervall
$(a,b):=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$ offenes Intervall
$(-\infty,b]:=\{x\in\mathbb{R}: x\le b\}$, $(-\infty,b):=\{x\in\mathbb{R}: x<b\}$,
$[a,\infty]:=\{x\in\mathbb{R}: x\ge a\}$, $(a,\infty):=\{x\in\mathbb{R}: x>a\}$, $(-\infty,\infty)$ sind unbeschränkte Intervalle

S1.5.18(766) Intervallschachtelungsprozess

Vor: Seien $I_n=[a_n,b_n]$, $a_n\le b_n$ mit $I_{n+1}\subset I_n$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$
Beh: $\exists$ mindestens ein $x\in\mathbb{R}$: $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, d.h. $a_n\le x\le b_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

Bem: 1.) $a_{n+1}\ge a_n$, $b_{n+1}\le b_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, $a_m\le a_n$, $\forall\ m\ge n$, $b_m\le b_n$, $\forall\ m\ge n$
2.) Aussage entspricht Axiom Vollständigkeit

1.6(800) Die komplexen Zahlen

Es soll ein $\mathbb{R}$ umfassender Körper konstruiert werden, in dem die Gleichung $x^2+1=0$ lösbar ist.

//D0.1.2 (3) $M_1=M_2:\Leftrightarrow x\in M_1 \Leftrightarrow x\in M_2$//

D1.6.1(800)

Die Menge $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$ mit Verknüpfungen
$+: (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2: (x_1,y_1)+(x_2,y_2)\quad (x_1+x_2)+(y_1+y_2)$
$\ast: (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2: (x_1,y_1)\ast(x_2,y_2)\quad (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$
heißt Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}=\{z\,|\,z=(x,y) \text{ mit } x,y\in\mathbb{R}\}$
Beachte $z_1=(x_1,y_1)=(x_2,y_2)=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ und $y_1=y_2$ siehe D0.1.2 oder
Die Menge aller Punkte $z=(x,y)^T\in\mathbb{R}$, zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1x_2-y_1y_2\\x_1y_2+x_2y_1\end{pmatrix}$$

heißt Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, oder die komplexe Zahlenebene.

S1.6.1(800)

1.) $(\mathbb{C},+,\ast)$ ist ein Körper

1,0)^T=i $\Rightarrow$ $i^2=-1$ und $z=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x+iy \quad \forall\ z\in\mathbb{C}$.

2.) $\mathbb{C}_\mathbb{R}:=\{(x,0)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, der zu $\mathbb{R}$ isomorph ist.
  φ: $\mathbb{R}\to\mathbb{C}_\mathbb{R}$ definiert durch x (x,0) ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$ auf
  $\mathbb{C}_\mathbb{R}$,(d.h.φ ist bijektiv mit
  $\varphi(x_1+x_2)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)$, $\varphi(x_1 \ast x_2)=\varphi(x_1)\ast\varphi(x_2) \quad \forall\ x_1,x_2\in\mathbb{R}$)

3.)Für imaginäre Einheit i:=(0,1) gilt
   $i^2=i\ast i=(0,1)*(0,1)=(0*0-1*1,0*1+1*0)=(-1,0)=-1\in\mathbb{R}$

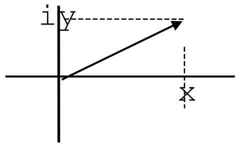
4.)z=(0,1) erfüllt $z^2=(-1,0)$

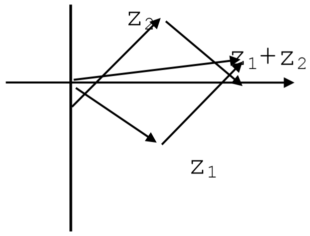
5.) $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden, da $i^2=-1<0$, Widerspruch zu ^{2} muß
   >0 sein

Kartesische Schreibweise der komplexen Zahlen

$z\in\mathbb{C}$, $z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=\underbrace{(x,0)}_{\in C_R}\ \underbrace{(1,0)}_{\in C_R}+\underbrace{(y,0)}_{\in C_R}\ \underbrace{(0,1)}_{=i}$

$z=(x,y)=(x,0)\ast 1+(y,0)i$
 $=x\ast 1+yi=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$





Bezeichnungen:Sei z=x+iy $x,y\in\mathbb{R}$ $i^2=-1$

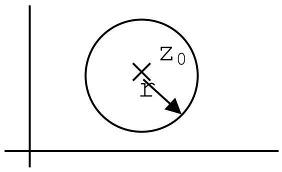
1.)x:=Re z Realteil von z

2.)y:=Im z Imaginärteil von z

3.) $\overline{z}$:=x-iy die zu z konjungierte komplexe Zahl

4.) $|z|:=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$ Betrag von z=Abstand von z zum 0 Punkt

5.) $U_r(z_0):=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|<r\}$ ist eine Kreisscheibe um $z_0\in\mathbb{C}$ mit Radius
   r(>0)



Für $z=x+iy\in\mathbb{C}$ gilt immer $(|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0)$

$\max\{|x|,|y|\}\leq|z|=\sqrt{x^2+y^2}\leq\sqrt{2\max\{x^2,y^2\}}\leq\sqrt{2\max\{|x|,|y|\}^2}\leq$
 $\sqrt{2}\max\{|x|,|y|\}\leq\sqrt{2}\ (\underbrace{|x|+|y|}_{\geq\max\{|x|,|y|\}})$

Bew: $|z|^2=x^2+y^2\geq x^2$, also $|z|\geq|x|$ und $|z|\geq|y|$. Daraus folgt die linke Ungleichung. Wegen $(\max\{|x|,|y|\})^2=\max\{x^2,y^2\}$ gelten auch die anderen Ungleichungen.

Beachte, dass die obige Definition des Betrags einer komplexen Zahl im Falle y=0 (also $z\in\mathbb{R}$) mit der früheren Definition des Betrags der reellen Zahl übereinstimmt.

Die komplexen Zahlen werden als Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ identifiziert.
Gaußsche Zahlenebene.

$\mathbb{C}$ läßt sich nicht anordnen, sonst wäre $\forall\ z\neq 0$, $z^2>0$, obwohl $i^2=-1$
Widerspruch!

Da sich $\mathbb{C}$ nicht anordnen lässt, ist es sinnlos, Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen zu betrachten. Allerdings kann man Ungleichungen untersuchen, in denen nur Beträge komplexer Zahlen auftreten. Z.B. gelten die Dreiecksungleichungen auch für Beträge komplexer Zahlen.

(801)Eigenschaften der komplexen Zahlen

Für $z,z_1,z_2\in\mathbb{C}$ gilt

1.) $\mathrm{Re}\ z=1/2(z+\overline{z})$ $\quad$ $\mathrm{Im}\ z=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=\frac{i}{2}(\overline{z}-z)$ da $i^2=-1,\ 1/i=-i$

$\left.\begin{array}{l} z=x+iy \\ \overline{z}=x-iy \end{array}\right\}$ $z+\overline{z}=2x,\ z-\overline{z}=2iy$ $(y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=-\frac{-i}{2}(z-\overline{z}))$

2.) $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z=\overline{z}$

3.) $\overline{\overline{z}}=z,\quad \overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2},\quad \overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ mit $z_2\neq 0$,

\# $\overline{z_1 z_2}=\overline{(x_1+iy_1)*(x_2+iy_2)}=\overline{x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2)}=$
\# $x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+y_1x_2)=(x_1-iy_1)*(x_2-iy_2)=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

\#Nach 5.) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\underbrace{=}_{S1.6.1}\overline{\left(z_1\frac{1}{z_2}\right)}=\overline{z_1}\ \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}\ \overline{z_1}\underbrace{=}_{5.)}\frac{1}{\overline{z_2}}\underbrace{=}_{S1.6.1}\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

\# $\overline{z_1+z_2}=\overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}=\overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)=$
\# $(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

\# $\overline{z_1-z_2}=\overline{(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)}=\overline{(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)}=(x_1-x_2)-i(y_1-y_2)=$
\# $(x_1-iy_1)-(x_2-iy_2)=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

4.) $z=x+iy,\ |x|=|\mathrm{Re}\ z|=\sqrt{x^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}=|z|,\ |y|=|\mathrm{Im}\ z|=\sqrt{y^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}=|z|$

5.) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\overline{\left(\frac{1}{x+iy}\right)}=\overline{\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x+iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{1}{x-iy}=\frac{1}{\overline{z}}$

S1.6.2(802)

Vor. Sei $z,z_1,z_2\in\mathbb{C}$ dann

1.) $|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$ $\quad$ $|z|=|-z|\geq 0\ \forall\ z\in\mathbb{C}$ und $|z|=0 \Leftrightarrow z=0,\ |z|=|\overline{z}|=\sqrt{z\overline{z}}$

2.) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad |\frac{z_1}{z_2}|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ falls $z_2\neq 0$

3.) Δ Ungleichung

$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|,\ |z_1|-|z_2|\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|,$
$|z_1\pm z_2|\geq||z_1|-|z_2||\geq|z_1|-|z_2|$
„=„ gilt $\Leftrightarrow z_2=\lambda z_1$ oder $z_1=\lambda z_2$ $\lambda\geq 0$

$\overline{z}$

Bem:1.) $\mathrm{Re}\ z\leq|\mathrm{Re}\ z|\leq|z|\leq|\mathrm{Re}\ z|+|\mathrm{Im}\ z|,$
$\mathrm{Im}\ z\leq|\mathrm{Im}\ z|\leq|z|\leq|\mathrm{Re}\ z|+|\mathrm{Im}\ z|,$

2.) $z=x+iy \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\leq|x| \\ y\leq|y| \end{array}\right\}\leq|z|\leq|x|+|y|$ *da $(x^2+y^2)\leq(|x|+|y|)^2$

3.) $z=x+iy\neq 0,\ 1/z=z^{-1}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$

4.) der Betrag für $z\in\mathbb{R}$ stimmt mit dem reellen Betrag überein

D1.6.2(803)

Für $z\in\mathbb{C}$: $z^0:=1,\ z^1:=z,\ z^{n+1}:=z*z^n,\ z^{-n}:=(1/z)^n$ $(n\in\mathbb{N}, z\neq 0)$

S1.6.3(803)

Für $z\in K$ (Körper) und $n\in Z$ sei für $-n\in N$ $nz:=(-n)(-z)$ und, falls $z\neq 0$,
$z^n:=(z^{-1})^{-n}=(1/z)^{-n}$ $\forall$ $n,m\in Z$ und $z\in K$ gilt
$nz+mz=(n+m)z$, $m(nz)=(mn)z$, $nz+nw=n(z+w)$, $(z,w\neq 0$, falls $n,m<0)$

(.) $z^n z^m=z^{n+m}$

(..) $(z^n)^m=z^{mn}$

(...) $(zw)^n=z^n w^n$, $z,w\neq 0$ für $n,m<0$

$=-\mathrm{Im}\ z$

b) $\overline{(z^{-1})}=(\bar{z})^{-1}$, $\overline{(cz^{-1})}=c(\bar{z})^{-1}$

1.7(900) Einige Identitäten, Ungleichungen und Definitionen

(900)**Idenditäten:**

1.) $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k=\sum\limits_{\nu=m}^{n} a_\nu$ 2.) $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k=\sum\limits_{k=m-\ell}^{n-\ell} a_{k+}$ ($\in Z$) 3.) $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k=\sum\limits_{k=m}^{n-1} a_k+a_n$

4.) $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k=\sum\limits_{\nu=m}^{n} a_{n+m-\nu}$ Kommutativgesetz

zur Erläuterung:

ν	m	$m+1$	.....$n-1$	n
$n+m-\nu$	n	$n-1$	$m+1$	m

5.) $\sum\limits_{k=m}^{n} (ca_k)=c\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ Distributivgesetz

6.) $\sum\limits_{k=m}^{n} 1=n-m+1$ falls $n\geq m$ (Bsp $\sum\limits_{k=5}^{6} 1=6-5+1=2$)

7.) $\sum\limits_{k=m}^{n} (a_k\pm b_k)=(\sum\limits_{k=m}^{n} a_k)\pm(\sum\limits_{k=m}^{n} b_k)$, $n\geq m$,

8.) $m,n\in Z$, $\forall$ $a_k\in C$, $k\geq m$

(.) $|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k|\leq\sum\limits_{k=m}^{n} |a_k|$ $(n\geq m)$ (Dreiecksungleichung)

(..) $|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k|\geq|a_m|-\sum\limits_{k=m+1}^{n} |a_k|$ $(n\geq m)$

9.) $\sum\limits_{\nu=m_1}^{n_1}\sum\limits_{m=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu}=\sum\limits_{m=m_2}^{n_2}\sum\limits_{\nu=m_1}^{n_1} a_{\nu\mu}$, $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sum\limits_{m=1}^{\nu} a_{\nu\mu}=\sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{\nu=m}^{n} a_{\nu\mu}$

$\sum\limits_{\nu=m_1}^{n_1}\sum\limits_{m=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu}=\sum\limits_{\nu=m_1}^{n_1} b_\nu=\sum\limits_{\mu=m_2}^{n_2}\sum\limits_{\nu=m_1}^{n_1} a_{\nu\mu}$, $b_\nu=\sum\limits_{m=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu}$

$a_{\nu\mu}$: $(m_1\le\nu\le n_1,\ m_2\le\mu\le n_2)$

$m_1=m_2=1,\ n_1,n_2\in\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{llllll}
\nu & \mu & 1 & 2 & & n_2 \\
1 & & a_{11} & a_{12} & & a_{1n_2} \\
2 & & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n_2} \\
 & & \vdots & & & \vdots \\
n_1 & & a_{n_11} & a_{n_12} & a_{n_13} & a_{n_1n_2}
\end{array}$$

$m_1=m_2=1,\ n_1=n_2=n,\ 1\le\mu\le\nu\le n$

(Zeilen addieren) $\underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu}}_{\substack{1\le\nu\le n\\ 1\le\mu\le\nu}} a_{\nu\mu} = \underbrace{\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=\mu}^{n}}_{\substack{1\le\mu\le n\\ \mu\le\nu\le n}} a_{\nu\mu}$ (Spalten addieren)

$$\begin{array}{llllll|lllll}
\nu & \mu & 1 & 2 & & n & 1 & 2 & 3 & & n \\
1 & & a_{11} & & & & a_{11} & & & & \\
2 & & a_{21} & a_{22} & & & a_{21} & a_{22} & & & \\
3 & & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\
n & & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots & a_{nn} & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}
\end{array}$$

10.) $(0\le\nu\le k\le n)$ $\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=\nu}^{n} 1/k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{k} 1/k = \sum_{k=1}^{n} 1/k \sum_{\nu=1}^{k} 1 = \sum_{k=1}^{n} 1/k\cdot k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$

S1.7.1(901) $m\le n\in\mathbb{N}$ und Koeffizienten $a_k\in\mathbb{C}$, $m\le k\le n$.

$$\sum_{k=m,n\ge m}^{n}(a_k-a_{k+1})=(a_m-a_{m+1})+(a_{m+1}-a_{m+2})+(a_{m+2}-a_{m+3})+\ldots(a_n-a_{n+1})$$

$= a_m-a_{n+1}$ heißt Teleskopsumme

$\Delta a_k:=a_k-a_{k+1}$ die erste Differenz bei a_k.

Andere Formulierung:

$$\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k)= a_{n+1}-a_m$$

3.) $\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\left((k+1)^3-k^3\right)}_{k^3+3k^2+3k+1-k^3}=(n+1)^3=3\sum_{k=0}^{n}k^2+\underbrace{3\sum_{k=0}^{n}k}_{\frac{3n(n+1)}{2}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{n}1}_{n+1}$

$3\sum_{k=0}^{n}k^2=(n+1)^3-\frac{3n(n+1)}{2}-(n+1)=(n+1)\left((n+1)^2-\frac{3n}{2}-1\right)=$

$(n+1)\left(n^2+2n+1-\frac{3n}{2}-1\right)=(n+1)\left(n^2+\frac{n}{2}\right)=n(n+1)\frac{2n+1}{2}\ \Rightarrow$

$\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4.) $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^4-k^4)$, $(n+1)^4=\sum_{k=0}^{n}k^4+4k^3+6k^2+4k+1-k^4$

$\sum_{k=0}^{n}k^3=1/4\left((n+1)^4-6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)\right)=$

$1/4(n+1)((n+1)^3-n(2n+1)-2n-1)=1/4(n+1)((n+1)^3-(2n+1)(n+1))=$

$1/4(n+1)^2((n+1)^2-(2n+1))=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

5.) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

S1.7.2(904) Endliche geometrische Reihe

Vor.Seien a,b∈**C**, n∈$\mathbf{N}_0$

Beh:

S1.7.3(904) Abelsche partielle Summation

m≤n∈**N** und Koeffizienten a_k,b_k∈**C**, m≤k≤n-1, m≤ν≤k, $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{k=m}^{n} b_k + \sum_{k=m}^{n-1} \Delta a_k \underbrace{\sum_{\nu=m}^{k} b_\nu}_{=:B_k} =: a_n B_n + \sum_{k=m}^{n-1} \Delta a_k B_k .$$

***S1.7.2** (903)a,b∈C, n∈N₀:1.)* $\sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} n+1, a=1 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, a \neq 1 \end{cases}$

1.7.1(906)

Für n∈$\mathbf{N}_0$, α∈**C** sei

1.) $n! := \prod_{k=1}^{n} k = \begin{Bmatrix} 1 \text{ für } n=0 \\ 1*2*,\ldots*n, n \in N \end{Bmatrix}$ heißt n Fakultät

0!=1, weil ein leeres Produkt den Wert 1 haben soll.

2.) $\binom{\alpha}{n} := \frac{\prod_{k=1}^{n}(\alpha+1-k)}{n!} = \begin{Bmatrix} 1 \text{ für } n=0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, n \in N \end{Bmatrix}$

heißt Binominalkoeffizient α über n

$\binom{\alpha}{0} = 1$ entsprechend 1.)

S1.7.4(906) Für α∈**C** und n,m,k∈$\mathbf{N}_0$ j∈ **N** gilt

1.) $\binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1}$

2.) $\binom{n}{m} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ falls } n<m \\ \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{ falls } n^3 m \end{Bmatrix}$

3.) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \underset{2.)}{=} \frac{n!}{(n-m)!(n+m-n)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \underset{2.)}{=} \binom{n}{m}$ falls n≥m

4.) $\frac{n^k}{k!}(1 - \frac{k(k-1)}{2n}) \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$, 0≤k≤n

5.) $\binom{\alpha}{j} + \binom{\alpha}{j-1} = \binom{\alpha+1}{j}$

6.) Aus 1.) ⇒ Binominalsatz. ∀ a,b,z∈ **C** und n∈$\mathbf{N}_0$ gilt

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} a^k$, wenn man $a^0=b^0=(a+b)^0$ setzt

$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$

$a=b=1 \Rightarrow 2^n=\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}$, $0^0=1$

$a=-1, b=1 \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^{\nu} = (1-1)^n = 0^n \quad n \in \mathbb{N}_0$

Bem: Pascalsches Dreieck $0 \le m \le n$

n=1	1
n=2	1 2 1
n=3	1 3 3 1
n=4	1 4 6 4 1
n=5	1 5 10 10 5 1

$10=\binom{5}{3}=\frac{5*4*3}{1*2*3}=\binom{4}{3-1}+\binom{4}{3}$ entsprechend 5.)

$$\binom{\alpha+1}{j} = \binom{\alpha}{j-1} + \binom{\alpha}{j}$$

1.8(1000) Arithmetisches und geometrisches Mittel

D1.8.1(1000) Für $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}$, heißt

$A(x_1, \ldots x_n) = 1/n \sum_{j=1}^{n} x_j$ das arithmetische Mittel der Zahlen x_j.

Falls alle $x_j \ge 0$ sind, heißt

$G(x_1, \ldots x_n) = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j}$ das geometrische Mittel der Zahlen x_j.

S1.8.1(1000) $\min\{x_1, \ldots x_n\} \le \left\{ \begin{matrix} A(x_1, \ldots, x_n) \\ G(x_1, \ldots, x_n) \end{matrix} \right\} \le \max\{x_1, \ldots x_n\}$

S1.8.2(1000) AGM Ungleichung
$x_1, \ldots x_n \ge 0$: $G(x_1, \ldots x_n) \le A(x_1, \ldots x_n)$ und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn alle x_j gleich sind.

S1.8.3 (1002) Für $a \ge 0$, $a \ne 1$, $n, p \in \mathbb{N}$ und $1 \le p < n$ gilt immer

$$\sqrt[n]{a^p} < \frac{pa+(n-p)}{n} = 1 + \frac{p}{n}(a-1) = \frac{n-p}{n} + \frac{pa}{n}$$

1.9(1100) Polynome, rationale Funktionen

Polynome als formale Ausdrucke und als Abbildungen

Polynomabbildung $z \mapsto a_0+a_1z+...+a_nz^n$

Betrachtung Körper $K=\mathbb{F}_2=\{0,1\}$; $1+x=1+x^2$ in $\mathbb{F}_2$ wie folgt; Abb gleich!!!

x	$x \mapsto 1+x$	$x \mapsto 1+x^2$
1	0	0
0	1	1

Also kann keine höchste Potenz angegeben werden.

Addition und Multiplikation zu Polynomen sind erklärt, aber es gibt z.B. zu $x \mapsto x^2$ kein Inverses, erfüllen also nicht alle Körperaxiome. Man spricht von einem Ring, in dem es nicht für alle Elemente ein Inverses gibt

Deshalb Polynome als formale Ausdrucke

D1.9.0 Polynom über einen Körper ist ein formaler Ausdruck
$P(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n$, $a_j \in K$, $j=0,1,2,…,n$

D1.9.0.1 • Addition
$P(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n$, $a_j \in K$, $j=0,1,2,…,n$
$Q(z)=b_0+b_1z+...+b_nz^n$, $a_j \in K$, $j=0,1,2,…,n$
$(P+Q)(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)z+...+(a_n+b_n)z^n$,
gewisse $a_j, b_j \in K$, können 0 sein

• Multiplikation
$(P*Q)(z)=(a_0+a_1z+...+a_nz^n)*(b_0+b_1z+...+b_mz^m)=$

$$(a_0*b_0)+(a_1*b_0+a_0*b_1)z+(a_2*b_0+a_1*b_1+a_0*b_2)z^2+...+[\sum_{j=0}^{k} a_j*b_{k-j}]z^k$$

$k=0,1,…,m+n$

Schreibweisen:

Menge der Polynome $K(z)$: $\{\underbrace{a}_{Abbildungen} : \mathbb{N}_0 \to \underbrace{K}_{Körper}$ mit $a(n)=0$ für fast alle n$\}$
(fast alle: für alle bis auf ∞ viele n… endlich viele n sind $\neq 0$)

$a(n)=a_n$, $\underbrace{a}_{Abbildungen} = (a_0, a_1, …, a_m, 0, 0, …)$

Definitionen in dieser Schreibweise:
Addition: $(a_0,a_1,…)+(b_0,b_1,…)=(a_0+b_0, a_1+b_1,…)$

Multiplikation: $(a_0,a_1,…)*(b_0,b_1,…)=(c_0,c_1,…)$, $c_k=\sum_{j=0}^{k} a_j*b_{k-j}$

Körperaxiome erfüllt? Nein: denn zu (0,1,0..) existiert kein Inverses

Man spricht von einem Ring, hier Polynomring, in dem es nicht für alle Elemente ein Inverses gibt (siehe p19_anlage)
z.B.: Z_0 ist auch ein Ring da kein a mit $a \otimes a^{-1} \neq 1$

D1.9.1(1100) Seien $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, a_2..., a_k \in K$, $z^0=1$, $0^0=1$ gegeben, dann heißt

1.)Die Funktion $P: K \to K$, $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ist ein Polynom in z mit

Koeffizienten $a_0,a_1,a_2...,a_n$ und Grad n, falls $a_n\neq 0$ (n=grad(P) oder $n=\gamma(P)$). Polynome $\gamma(P)=0$ sind konstant $P(z)=c\neq 0$, $c\in\mathbb{C}$, aber nicht identisch gleich 0, solche vom Grad n=1 bzw n=2 heißen lineare bzw quadratische Funktionen.
Die Menge aller Polynome (Variable z) mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ wird mit $\mathbb{K}[z]$ bezeichnet, die Teilmenge der Polynome vom Grade höchstens gleich n sei $\mathbb{K}_n[z]$ für $n\in\mathbb{N}_0$.

Beachte: $\text{grad}(Q(z))=0$ falls $Q(z)\equiv a_0\neq 0$, $f:z\mapsto\sum_{k=0}^{n} a_k z^k=0\ \forall\ z \Rightarrow f\equiv 0$

2.) Ein $z_0\in\mathbb{K}$ ist Nullstelle von P: $\Leftrightarrow$ $P(z_0)=0$, $P(z)\neq 0$
Wir nennen z_0 eine Nullstelle m-ter Ordnung, oder Nullstelle der Vielfachheit m von P, wenn es ein $Q\in\mathbb{K}[z]$ gibt, so dass $P(z)=(z-z_0)^m Q(z)\ \forall\ z\in\mathbb{K}$ gilt, und $Q(z_0)\neq 0$.
Bem: Das Polynom x^2+1 hat offenbar in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle, in $\mathbb{C}$ dagegen besitzt es 2 Nullstellen, nämlich i und -i. Wir werden später beweisen, daß jedes nicht konstante Polynom mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt.

3.) Mit Polynomen $P,Q:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ ist die Funktion
$R:\mathbb{K}\backslash\{\text{Nullstellen von } Q\}\to\mathbb{K},\ z\mapsto\frac{P(z)}{Q(z)}$ eine rationale Funktion.

Andere Formulierungen:
Sind $P,Q\in\mathbb{K}[z]$ und ist Q nicht das Nullpolynom, so ist der Quotient P/Q überall dort definiert, wo $Q(z)\neq 0$ ist. Wir nennen P/Q eine rationale Funktion und die Menge der z mit $Q(z)\neq 0$ heißt ihr natürlicher Definitionsbereich. Die Menge der rationalen Funktionen sei mit $\mathbb{K}(z)$ bezeichnet.

4.) $P\equiv 0$ (d.h. $P(z)=0\ \forall\ z\in\mathbb{K}$) heißt Nullpolynom mit $\gamma(P):=-\infty$ (damit Bem immer richtig)
Falls alle $a_k=0$ sind folgt $P(x)\equiv 0$ und wir nennen dieses Polynom das Nullpolynom oder die Nullfunktion.
Bem: $\gamma(P*Q)=\gamma(P)+\gamma(Q)$, falls $P\equiv 0$ oder $Q\equiv 0$ ist $\gamma(P)+\gamma(Q)=-\infty$

5.) Sei $P\in\mathbb{K}[x]$ für ein $n\in\mathbb{N}$, und seien $x_1,...,x_\mu\in\mathbb{K}$ verschiedene Nullstellen von P der Vielfachheiten $m_1,...,m_\mu$. Dann sagen wir:

P hat $m=\sum_{j=1}^{\mu} m_j$ Nullstellen in $\mathbb{K}$ (wenn wir entsprechend der Vielfachheit zählen, was normalerweise der Fall ist). Die Aussage, dass P höchstens n Nullstellen haben kann, ist also zu interpretieren als $\sum_{j=1}^{\mu} m_j\leq n$.

6.) K heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes Polynom $\neq 0$ eine Nullstelle hat

Bem: Jeder Körper hat einen Erweiterungskörper $\overline{K}$, $K \subset \overline{K}$, der algebraisch abgeschlossen ist.
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beachte, dass die Bezeichnung der Unbestimmten völlig willkürlich ist. Wir werden daher im Fall $K=\mathbb{C}$ oft $\mathbb{C}[z]$ bzw $\mathbb{C}(z)$ für die Menge der Polynome bzw rationalen Funktionen mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ schreiben.

Bem: $\gamma(P*Q))=\gamma(P)*\gamma(Q)$;
$\gamma(P+Q))\le\max\{\gamma(P),\gamma(Q)\}$, (< falls sich die höchsten Glieder aufheben)

Abbildung
ϕ: $f\in K[z] \mapsto$ Die Abbildung $\alpha \mapsto f(\alpha)$, $\alpha\in K$,
$K[z] \mapsto$ Abbildung(K,K) ???...Im allgemeinen nicht injektiv, aber

P1.9.1 ϕ: $K[z] \mapsto$ Abbildung(K,K) ist injektiv, falls K unendlich viele Elemente hat

S1.9.0 Addition von Polynomen (Gewisse a_k, b_k können auch 0 sein)

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{n} b_k z^k\right)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)z^1+\ldots(a_n+b_n)z^n.$$

Multiplikation von Polynomen

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k z^k\right)=(a_0+a_1z^1+\ldots+a_nz^n)(b_0+b_1z^1+\ldots+b_nz^n)=$$

$$a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)z^1+\ldots+\left[\sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}\right]z^k+\ldots+\left[\sum_{j=0}^{n} a_jb_{k-j}\right]z^n$$

S1.9.1 *(1103)*
Vor:Sei P ein Polynom, $\gamma(P)\ge 1$, $n\in\mathbb{N}_0$
1.) Ist $z_0\in\mathbb{C}$ eine Nullstelle von $P(z)$, so $\exists$ ein Polynom $Q(z)$ mit $\gamma(Q)=n-1$ sodass gilt $P(z)=(z-z_0)Q(z)\ \forall\ z\in\mathbb{C}$
2.) $P(z)$ hat höchstens n Nullstellen in $\mathbb{C}$, außer wenn es das Nullpolynom ist.
Bem: n, <u>nicht</u> n+1 entsprechend 0,1,2,…n!

S1.9.1' (1104) Für ein $P(x)=\sum_{0}^{n} a_kx^k\in K[x]$ (Menge aller Polynome) und beliebiges $x_0\in K$ ist $P(x+x_0)=\sum_{0}^{n} b_jx^j$, mit $b_j=\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}a_kx_0^{k-j}\ \forall\ j=0,\ldots n$; also ist $P(x+x_0)$ wieder in $K[x]$ und hat den gleichen Grad wie P

S1.9.1'' (1105) Sei $P\in K[x]$ mit $\gamma(P)=n$ für ein $n\in\mathbb{N}$. Dann hat jede Nullstelle x_0 von P eine eindeutig bestimmte Ordnung m, und m⫤n.

S1.9.1''' (1106) Divisionssatz (Division mit Rest)
Vor: Polynome $S(z)\not\equiv 0$,$P(z)$ beliebig.
Beh: $\exists$ eindeutig bestimmte Polynome $Q(z)$ und $R(z)$: $P=Q*S+R$, $\gamma(R)<\gamma(S)$ S.
Andere Formulierung:
$K[x]$ Menge aller Polynome mit Potenzen von x.
Sei $f,g\in K[x]$, $g\neq 0$, dann
$\exists$ eindeutig bestimmte $q,r\in K[x]$ und $f=qg+r$, $\gamma(r)<\gamma(g)$

S1.9.1'''' (1105) $|z|\geq\rho:=2\frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|}{|a_n|}$ & $|x|\geq(2\underline{G}/a_n|)^{1/n}$, $\underline{G}\in\mathbb{R}_+ \Rightarrow$

$|P(z)|\geq \underline{G}$

P1.9.2 $f\in K[z]$, $f\neq 0$, $\lambda\in K$ Nullstelle von f $\Rightarrow$
$\exists\ g\in K[z]$, $f(z)=(z-\lambda)^p g(z)$, Vielfachheit der Nullstelle $p\in\mathbb{N}$, $g(\lambda)\neq 0$

S1.9.2 (1107) Identitätssatz für Polynome

Vor: Seien Polynome $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $Q(z)=\sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ mit $n,m\in\mathbb{N}_0$, $n\geq m$ gegeben. Für $n+1$ verschiedene Zahlen $z_1,\ldots,z_{n+1}\in\mathbb{C}$ gelte $P(z_j)=Q(z_j)$, $j=1,2,\ldots,n+1$

Beh: $m=n$ und $a_k=b_k$ $\forall$ $k=0,1,2,\ldots,n$, also $P(z)=Q(z)$, $0\leq k\leq n$

Bem: $\sum_{\nu=m_1}^{n_1}\sum_{\nu=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu}=\sum_{\mu=m_2}^{n_2}\sum_{\nu=m_1}^{n_1} a_{\nu\mu}$, $\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\nu\mu}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=\mu}^{n} a_{\nu\mu}$, $1\leq\mu\leq\nu\leq n$

Bem: Sei eine rationale Funktion $R\in K[x]$. Nach dem Nullstellensatz kann das Nennerpolynom von R nur endlich viele Nullstellen haben. Also ist der natürliche Definitionsbereich von R gleich $K\setminus T$, wobei T eine endliche (evt sogar leere) Teilmenge von K ist.

S1.9.3 (1150) Cauchy-Schwarz Ungleichung

Vor: $n\in\mathbb{N}_0$, $a_k,b_k\in\mathbb{C}$, $1\leq k\leq n$ dann

Beh: $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k|^2\leq(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2)(\sum_{\nu=1}^{n}|b_\nu|^2)$ auch $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|b_\nu|^2}$

Bem: Es gilt $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k|^2=(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2)(\sum_{\nu=1}^{n}|b_\nu|^2)$ $\Leftrightarrow$

$a_\nu\overline{b_\mu}-a_\mu\overline{b_\nu}=0$ $\forall$ μ,ν mit $1\leq\mu\leq\nu\leq n$ $\Leftrightarrow$

$\exists\ \lambda\in\mathbb{C}$: $a_\nu=\lambda\overline{b_\nu}$ $\forall$ $\nu=1,\ldots,n$ oder $b_\nu=\lambda\overline{a_\nu}$ $\forall$ $\nu=1,\ldots,n$

(..) Arithmetisches-geometrisches Mittel Ungleichung:
Für $a,b\geq 0$ gilt: $\sqrt{ab}\leq(a+b)/2$

S1.9.3' (1151) Cauchy-Schwarz Ungleichung

($\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k|$ statt $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k|$ in S1.9.3)

Vor: $n\in\mathbb{N}_0$, $a_k,b_k\in\mathbb{R}$, $1\leq k\leq n$ Beh: $\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k|\leq\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}}_{A}\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}}_{A}$

S1.9.4 (1152) Cauchy Produkt

Es seien Polynome $P(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ mit $a_n\neq 0$ und $Q(z)=\sum_{\nu=0}^{m} b_\nu z^\nu$ mit $b_m\neq 0$

gegeben. Dann ist $(P*Q)(z)$ ein Polynom vom $\mathrm{grad}(P*Q)=n+m$ mit $(P*Q)(z)=\sum_{\nu=0}^{n+m} c_\nu z^\nu$ mit Koeffizienten $c_k=\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu b_{k-\nu}=\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu a_{k-\nu}$, $1\le k\le n+m$, wobei wir $a_\nu=b_\nu=0$ setzen, wo die Koeffizienten nicht definiert waren.

(1152) Interpolation mit Polynomen

In diesem Abschnitt seien n+1 verschiedene Zahlen $x_0,...x_n\in K$ (die Stützstellen) und ebenso viele (nicht unbedingt verschiedene) Werte $p_0,...p_n\in K$ fest gegeben. Unter dem Problem der Polynominterpolation versteht man die Aufgabe, ein Polynom möglichst kleinen Grades zu finden, welches an den Stellen x_k die gegebenen Werte p_k annimmt.

$P(x_k)=Q(x_k)$, $0\le k\le n$, Eindeutigkeit klar.

$P(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $P(x_k)=p_k$, $k=0,...,n$ $\qquad \underbrace{L_m(x_m)}_{=1}$

$L_k(x)=\prod_{\nu=0,\nu\neq k}^{n} \frac{x-x_\nu}{x_k-x_\nu}$ (Pol nten Grades)

$L_k(x_k)=1$, $L_k(x_\mu)=0$, $\mu\neq k$, 1 Faktor 0 für $\mu=k$

$P(x)=\sum_{k=0}^{n} p_k L_k(x) \Rightarrow P(x_\mu)=\sum_{k=0}^{n} p_k L_k(x_\mu)=p_\mu \underbrace{L_m(x_m)}_{=1}$

S1.9.5(1153) Hauptsatz der Polynominterpolation

Zu n+1 verschiedenen Stützstellen $x_0,...x_n$ und beliebigen Werten $p_0,...p_n$ gibt es genau ein $P\in K_n[x]$ mit $P(x_k)=p_k$, für $0\le k\le n$.

D1.9.2(1153) Die Formel $P(x)=\sum_{k=0}^{n} p_k L_k(x)$ heißt Lagrange Darstellung des Interpolationspolynoms. Sie ist für die konkrete Berechnung weniger geeignet als die im Folgenden behandelte Newtonsche Darstellung.

D1.9.3(1153) Interpolationspolynom Newtonsche Darstellung

Lösung

$N(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+...+a_n(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$,

$y_k=N(x_k)\ \forall\ 0\le k\le n \underset{x_k-x_k=0}{\Rightarrow}$

$y_0=a_0$

$y_1=a_0+a_1(x_1-x_0)$

$y_2=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$

.

.

$y_n=a_0+a_1(x_n-x_0)+a_2(x_n-x_0)(x_n-x_1)+\dots$

$+a_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})$

S1.9.6(1155) Wurzelfunktion

$\forall\ n\in N$ bildet die Abb $x\mapsto x^n$ das Intervall $[0,\infty)$ bijektiv auf sich selbst ab $\Leftrightarrow \exists\ \sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$

#Bem:1.)Aus Umkehrfunktion: $(a^{1/p})^p=(\sqrt[p]{a})^p=a^{\frac{1}{p}*p}=a^1=a$

2.) $a,b>0$, $r=\frac{p}{q}$, $s=\frac{l}{m}\in\mathbb{Q}$:

a.) $a^r a^s = a^{r+s}$ b) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ c) $(a^r)^s = a^{rs}$ d) $a^r b^r = (ab)^r$ e) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

#**S1.9.7**(1157) $a,b\in\mathbb{R}$, $a,b>0$ $r\in\mathbb{Q}$. (.) $r>0$, $a<b \Leftrightarrow a^r<b^r$ (..) $r<0, a<b \Leftrightarrow a^r>b^r$

#S1.9.8(1157) $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, $r,s\in\mathbb{Q}$, $r<s$: $a^r<a^s \Leftrightarrow a>1$, $a^r>a^s \Leftrightarrow a<1$.

D1.9.4(1157)

(.) Sei eine natürliche Zahl $n\geq 2$ gegeben. Nach Vorstehendem schließen wir, dass die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^n$ auf $[0, \infty)$ definiert ist. Wir nennen sie die nte Wurzelfunktion und schreiben auch $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ für die nte Wurzel einer Zahl $x\geq 0$. Diese Definition stimmt für $n=2$ mit der früheren Quadratwurzel überein.

#(..) $a>0$, $r=p/q$, $p,q\in\mathbb{N}$, $a^r := \sqrt[q]{a^p}$, $a^{-r} := \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$

Bem: 1.) Def (..) eindeutig, d.h. a^r ändert seinen Wert nicht, wenn $r=p/q$ durch Erweitern oder Kürzen zu anderen natürlichen Zahlen übergeht