1.8(1000) **Arithmetisches und geometrisches Mittel**

D1.8.1(1000) Für $x_1,...x_n \in \mathbb{R}$, heißt

$A(x_1,...x_n)=1/n \sum_{j=1}^{n} x_j$ das arithmetische Mittel der Zahlen x_j.

Falls alle $x_j \geq 0$ sind, heißt

$G(x_1,...x_n)=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j}$ das geometrische Mittel der Zahlen x_j.

S1.8.1(1000) $\min\{x_1,...x_n\} \leq \begin{Bmatrix} A(x_1,\dots,x_n) \\ G(x_1,\dots,x_n) \end{Bmatrix} \leq \max\{x_1,...x_n\}$

*Bew: Idee n=2 Induktion $n \mapsto n+1$

Der nächste Satz zeigt, daß das arithmetische Mittel immer der größere der beiden Mittelwerte ist. Für n=2 bedeutet das geometrisch, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks mit festem Umfang dann am größten ist, wenn es ein Quadrat ist: $\frac{\overbrace{a+b}^{c}}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{\frac{c}{2}+\frac{c}{2}}{2} = \sqrt{\frac{c}{2}\frac{c}{2}}$, denn dann sind die beiden Werte gleich

S1.8.2(1000) AGM Ungleichung

$x_1,...x_n \geq 0$: $G(x_1,...x_n) \leq A(x_1,...x_n)$ und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn alle x_j gleich sind.

Bew: Satz trivialerweise richtig für n=1, und wir zeigen induktiv die Richtigkeit für $n \geq 2$.

#n=2: $(\frac{1}{2}(x_1+x_2))^2 \geq \left(\sqrt{x_1 x_2}\right)^2 \Leftrightarrow x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 \geq 4x_1x_2 \Leftrightarrow x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(x_1-x_2)^2 \geq 0$ d.h. Beh richtig für n=2…

Offenbar ist die Beh stets richtig, wenn alle $x_j=0$ sind, und deshalb sei angenommen, daß $A(x_1,...x_n)>0$ ist.

Für $\lambda>0$ ist immer $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda x_k = A(\lambda x_1,...,\lambda x_n) = \lambda \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \lambda A(x_1,...x_n)$,

$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \lambda(x_k)} = G(\lambda x_1,..., \lambda x_n) = \sqrt[n]{\lambda^n \prod_{k=1}^{n}(x_k)} = \lambda G(x_1,...x_n)$, $G \leq A$, $\lambda G \leq \lambda A$

und deshalb können wir o.B.d.A. $A(x_1,...x_n)=1$ voraussetzen (durch λ herbeigeführt).

Falls alle $x_j=1$ sind, ist nichts mehr zu zeigen (A=G=1), und deshalb sei jetzt angenommen, dass $x \neq 1 \Rightarrow$

$\exists\ x_{n-1}=1-\alpha$ sowie $x_n=1+\beta$, mit $\alpha,\beta>0$.

Wegen $1=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \Leftrightarrow n=\sum_{j=1}^{n} x_j$ folgt daraus, mit $x'_{n-1}=1+\beta-\alpha=x_{n-1}+x_n-1$,

$\sum_{j=1}^{n-2} x_j + x'_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} x_j + x_{n-1}+x_n-1 = \sum_{j=1}^{n} x_j - 1 = n-1$ ist (wobei die Summe für n=2 leer ist, also den Wert 0 hat).

$A(x_n,...x_{n-2},x_{n-1}') = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-2} x_j + x_{n-1}'\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n-2} x_j + x_{n-1} + x_n - 1\right) =$

\# $\frac{1}{n-1}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j}_{=\underbrace{n*A}_{1}=n} -1\Big)=1$

\# siehe auch ###

Aus der Induktionshypothese, angewandt auf die Zahlen

$x_1,...x_{n-2},x'_{n-1}$ schließen wir dann , daß $x'_{n-1}\prod_{j=1}^{n-2} x_j\le 1$. Es ist aber

$x_{n-1}*x_n=1+\beta-\alpha-\alpha\beta<1+\beta-\alpha=x'_{n-1}$ woraus die Beh für n folgt

$\prod_{k=1}^{n} x_k=x_n x_{n-1}\prod_{k=1}^{n-2} x_k<x'_{n-1}\prod_{k=1}^{n-2} x_k\le 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} x_k<1$.

\###Das Vorlesungsmanuskript konnte ich nicht vollständig verstehen,

\#deshalb ein Versuch einer eigenen Formulierung:

\# Induktion von n-1 nach n:

\# IHyp n-1: $A_{n-1}(x_1,...x_{n-2},x'_{n-1})=1\ge G_{n-1}(x_1,...x_{n-2},x'_{n-1})=$

\# IS n-1+1: $A(x_1,...x_n)=1$, wegen $x_{n-1}*x_n=1+\beta-\alpha-\alpha\beta<1+\beta-\alpha=x'_{n-1}$

\# $\prod_{k=1}^{n} x_k=x_n x_{n-1}\prod_{k=1}^{n-2} x_k=x'_{n-1}\prod_{k=1}^{n-2} x_k\le 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} x\le 1 \Rightarrow A\le G$

Andere Formulierung:

//***D1.8.1*** *(1000) Für $x_1,...x_n\in R$, heißt//*

// $A(x_1,...x_n)=1/n\sum_{j=1}^{n} x_j$ das arithmetische Mittel der Zahlen x_j.//

// Falls alle $x_j\ge 0$ sind, heißt// !!!!

// $G(x_1,...x_n)=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j}$ das geometrische Mittel der Zahlen x_j.//

//***S1.8.1*** *(1000) $\min\{x_1,...x_n\}\le \begin{cases} A(x_1,\dots,x_n) \\ G(x_1,\dots,x_n)\end{cases} \le\max\{x_1,...x_n\}$//*

//S1.5.6 ***(715)*** *$x\in R$, $x\ge -1$, $n\in N$, $(1+x)^n\ge 1+nx$, = ⇔ x=0 oder n=0 oder n=1//*

Äquivalente Form $a_1*\dots a_n\le\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)^n$, $a_1*\dots a_n\ge 0$.

Um Triviales zu vermeiden sei $a_1*\dots a_n>0$.

n=1: $a_1\le\left(\frac{a_1}{1}\right)^1=a_1$.

\#IH n: $\underbrace{\Rightarrow}_{D1.8.1}$ $0\le\alpha:=\frac{a_1+\dots a_n}{n}$, $\alpha\ge\sqrt[n]{\prod_{n=1}^{n} a_n}$ ⇔ $\alpha^n\ge\prod_{n=1}^{n} a_n=a_1*\dots*a_n$

n→n+1:Sei $a_{n+1}\ge a_1\dots a_n$ ⇒ (Indices können beliebig verteilt werden)

\#⇒ $a_{n+1}\ge\max\{x_1,...x_n\}$ ⇒ $a_{n+1}\underset{S1.8.1}{\ge}\alpha$

$x:=\frac{a_{n+1}-\alpha}{(n+1)\alpha}\ge 0 \Rightarrow 1+\underbrace{\frac{a_{n+1}-\alpha}{(n+1)\alpha}}_{x}=\frac{n\alpha+a_{n+1}}{(n+1)\alpha}=\frac{a_1+\dots a_n+a_{n+1}}{(n+1)\alpha}\underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.6}$

$\left(\underbrace{\frac{a_1+\dots+a_{n+1}}{(n+1)\alpha}}_{1+x}\right)^{n+1}\ge 1+(n+1)\underbrace{\frac{a_{n+1}-\alpha}{(n+1)\alpha}}_{x}=1+\frac{a_1+\dots a_n+a_{n+1}}{\alpha}\ge\frac{a_{n+1}}{\alpha}\Rightarrow$

$\left(\frac{a_1+\dots+a_n+a_{n+1}}{(n+1)}\right)^{n+1}\ge\alpha^{n+1}\frac{a_{n+1}}{\alpha}=\alpha^n a_{n+1}\underbrace{\ge}_{IH} a_1*\dots a_n*a_{n+1}$.

S1.8.3 (1002) Für $a \geq 0$, $a \neq 1$, $n,p \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < n$ gilt immer

$$\sqrt[n]{a^p} < \frac{pa+(n-p)}{n} = 1+\frac{p}{n}(a-1) = \frac{n-p}{n} + \frac{pa}{n}$$

Bew: Folgt aus der AGM Ungleichung, $1/n \sum_{j=1}^{n} x_j \geq \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j}$,

angewandt auf die Zahlen $x_j = a$ bzw $=1$, für $1 \leq j \leq p$ bzw $p+1 \leq j \leq n$ ($x_1 = \ldots x_p = a$, $x_{p+1} = \ldots . x_n = 1$):

$$\sqrt[n]{a^p 1^{n-p}} \leq 1/n \left(\sum_{j=1}^{p} a + \sum_{j=p+1}^{n} 1 \right) = \frac{pa+(n-p)}{n}$$

A1.8.1

a) Ungleichung für arithmetisches und geometrisches Mittel
$\sqrt{ab} \le (a+b)/2 \ \forall\ a,b\ge 0$. Wann gilt hier genau Gleichheit?

*//**A1.2.9** (408) $a,b\in K$. Zeige: d) $2(a^2+b^2)\ge(a+b)^2\ge 4ab$//*

Lös: $\underbrace{(\frac{a+b}{2})^2 - ab = (\frac{a-b}{2})^2 \ge 0}_{d.h.\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab = (\sqrt{ab})^2}$ mit „=0“ $\Leftrightarrow$ $\frac{a-b}{2}=0 \Leftrightarrow a=b$

$\underbrace{\Rightarrow}_{A1.2.9}$ $\underbrace{\left|\frac{a+b}{2}\right|}_{=\frac{a+b}{2}} \ge |\sqrt{ab}| = \sqrt{ab}$ da $a,b\ge 0$ nach Vor. und „=“ $\Leftrightarrow$ $a=b$

b) Zeige mit Hilfe der AGM Ungleichung für $n,p\in\mathbb{N}$ mit $n\ge 2p$, dass
$\sqrt[n]{n^p} < 1+2p/\sqrt{n}$. Anl: Setze $x_j=\sqrt{n}$ für $1\le j\le 2p$

Lös: Anl $\Rightarrow$ $\prod_{j=1}^{2p}\sqrt{n} = (\sqrt{n})^{2p} = n^p$. Setze $x_j=1$ für $2p<j\le n$, dann $\prod_{j=1}^{n} x_j = n^p$.

$\sqrt[n]{n^p} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} = G(x_1,\dots x_n) \le A(x_1,\dots x_n) = 1/n \sum_{j=1}^{n} x_j =$

$1/n\left(\sum_{j=1}^{2p}\sqrt{n} + \sum_{j=2p+1}^{n} 1\right) = 1/n\,(2p\sqrt{n} + (n-2p)) = \frac{2p}{\sqrt{n}} + 1 - 2p/n < 2p/\sqrt{n} + 1$

c) Für $x_1,\dots x_n>0$ heißt $H(x_1,\dots x_n)=\frac{1}{A(1/x_1,\dots 1/x_n)}$ das harmonische Mittel
der Zahlen x_j. Leite aus der AGM Ungleichung ab, dass
$H(x_1,\dots x_n)\le G(x_1,\dots x_n)$ gilt, mit = genau dann, wenn alle x_j gleich sind

Lös: $H=\frac{1}{A} \le \frac{1}{G(1/x_1,\dots,1/x_n)} = \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}(1/x_j)}} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} = G(x_1,\dots x_n)$.