

**D1.5.3** (750)

Sei  $M$  eine beliebige Menge, dann heißt

1.)  $M$  endlich:  $\Leftrightarrow M = \emptyset$  oder  $\exists m \in \mathbf{N}$  und  $\exists$  eine bijektive Abbildung

$f: \{1, 2, 3, \dots, m\} = \{n \in \mathbf{N} \mid 1 \leq n \leq m\} \rightarrow M$ , dann heißt  $m$  die Elementanzahl von  $M$ ,  $m = |M|$ , ( $|\emptyset| = 0$ ).

Mit  $a_n := f(n)$ ,  $1 \leq n \leq m$  ist  $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$  mit  $a_n = f^{-1}(n)$ ,  $1 \leq n \leq m$

2.)  $M$  unendlich:  $\Leftrightarrow M$  ist nicht endlich ( $|M| := \infty$ )

3.)  $M$  abzählbar:  $\Leftrightarrow \exists$  eine bijektive Abbildung  $f: \mathbf{N} \rightarrow M$

(d.h.  $M = \{a_n := f(n) \mid n \in \mathbf{N}\}$ )

4.) Eine Menge heißt abzählbar unendlich, falls es eine bij Abb  $f: \mathbf{N} \rightarrow M$  gibt

5.)  $M$  höchstens abzählbar:  $\Leftrightarrow M$  ist endlich oder abzählbar unendlich

6.)  $M$  überabzählbar:  $\Leftrightarrow |M| = \infty$  und  $M$  ist nicht höchstens abzählbar

7.) Eine Abbildung  $f: \mathbf{N} \rightarrow M \neq \emptyset$  eine Folge aus  $M$ :  $(a_n)$  oder besser  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$  mit  $a_n = f(n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

8.) 2 Mengen heißen gleich mächtig, wenn eine Bijektion zwischen den beiden Mengen gilt.

Bem: 1.) Abzählbarkeit bedeutet gleichmächtig wie  $\mathbf{N}$ .

2.) Eine Menge  $M$  ist höchstens abzählbar bedeutet:

$\exists$  injektive Abb  $\varphi: M \rightarrow \mathbf{N}$

**S1.5.7** (750) Teilmengen von abzählbar (unendlichen) Mengen sind höchstens abzählbar

\*Bsp: Quadratzahlen der natürlichen Zahlen bilden eine Teilmenge der natürlichen Zahlen

// **S1.5.5** (706) Wohlordnungss, Vor:  $M \subset \mathbf{N}$  und  $M \neq \emptyset$ , Beh:  $\exists \min M$  //

Bew: Sei  $A$  abzählbar unendlich und sei  $B \subset A$ . Wir nehmen o.B.d.A an, daß  $B$  nicht endlich ist. Sei  $f: \mathbf{N} \rightarrow A$  eine bij Abb und sei  $M = \{n \in \mathbf{N} : f(n) \in B\}$ . Dann ist  $M$  eine unendliche Teilmenge von  $\mathbf{N}$  und hat deshalb ein minimales Element  $n_1$ . Genau so hat die Menge  $M_1 = M \setminus \{n_1\}$  ein minimales Element  $n_2 (> n_1)$ . Allg: Sind  $n_1 < n_2 < \dots < n_m$  Elemente aus  $M$ , so besitzt  $M_m = M \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$  ein kleinstes Element, welches wir  $n_{m+1}$  nennen. Die Abb  $g: \mathbf{N} \rightarrow M$ ,  $g(m) = n_m$  ist sicher injektiv. Sie ist aber auch surjektiv, denn sonst müßte ein Element in  $M$  existieren, welches größer als unendlich viele natürliche Zahlen wäre, was nach weiter unten folgender **A1.5.14** nicht sein kann. Also ist  $f \circ g$  eine bij Abb von  $\mathbf{N}$  auf  $B$ , und deshalb gilt die Beh.

**A1.5.14** Zeige: Eine nach oben beschränkte Teilmenge  $M$  der natürlichen Zahlen ist endlich

**S1.5.8**(751) Eine unendliche Menge besitzt eine abzählbar unendliche Teilmenge

#Damit ist ja nicht gesagt, dass es keine anderen Teilmengen gibt.

Bew: Sei  $A$  unendlich  $\Rightarrow A \neq \emptyset$  und wir bezeichnen eines ihrer Elemente mit  $a_1$ . Sind bereits  $a_1, a_2, \dots, a_n$  aus  $A$  ausgewählt (alle verschieden), dann ist  $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \neq \emptyset$  und wir bezeichnen ein Element mit  $a_{n+1}$ . In dieser Weise bekommen wir eine Folge in  $A$  und die Menge der Folgeglieder ist abzählbar unendlich.

**S1.5.9**(751) Das kartesische Produkt zweier abzählbar (unendlicher) Mengen ist wieder abzählbar (unendlich).

Bew: Seien  $A, B$  abzählbar unendlich und seien  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$  sowie  $g: \mathbb{N} \rightarrow B$  bij Abb.

Dann ist die Abb  $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A \times B, (n, m) \mapsto (f(n), g(m))$  bij.

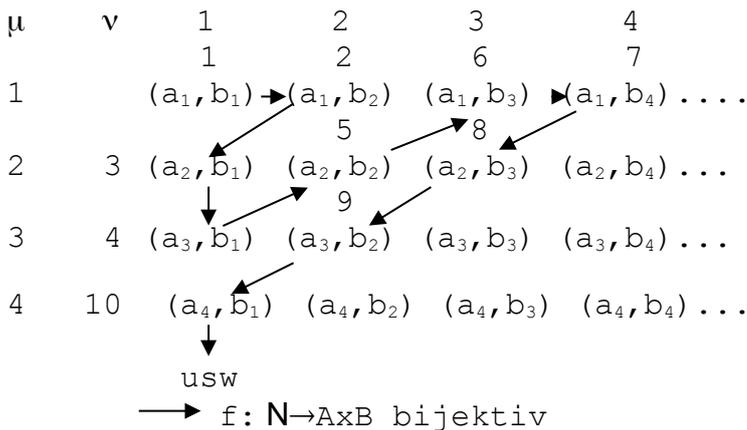
Eine natürliche Zahl  $k$  kann eindeutig zerlegt werden als

$$k = \underbrace{\mu(\mu-1)/2}_{\text{gerade}} + \nu, \quad \mu, \nu \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq \nu \leq \mu, \quad \text{und } k \mapsto (\mu, \nu) \quad (\nu, \mu - \nu + 1) \text{ ist eine bij}$$

Abb von  $\mathbb{N}$  auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

$\mu$	$\nu$	1	2	3	4	5
		1.	3.	6.	10. = 1+2+3+4 = 5(5-1)/2	
1		$(a_1, b_1)$	$(a_1, b_2)$	$(a_1, b_3)$	$(a_1, b_4)$	
		2.	5.	9.		
2		$(a_2, b_1)$	$(a_2, b_2)$	$(a_2, b_3)$	$(a_2, b_4)$	
		4.	8.			$\mu=4, \nu=2$
3		$(a_3, b_1)$	$(a_3, b_2)$	$(a_3, b_3)$	$(a_3, b_4)$	
		7.				
4		$(a_4, b_1)$	$(a_4, b_2)$	$(a_4, b_3)$	$(a_4, b_4)$	
		11. = 5(5-1)/2 + 1				$\mu=5, \nu=1$
5		$(a_5, b_1)$	$(a_5, b_2)$	$(a_5, b_3)$	$(a_5, b_4)$	

Auch andere Reihenfolge möglich



**S1.5.10** (752) Seien  $A_n$  höchstens abzählbare Mengen  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Dann ist die Vereinigung  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  höchstens abzählbar.

//**S1.5.7** (750) Teilmengen von abzählbar (unendlichen) Mengen sind höchstens abzählbar //

//**S1.5.8** (751) Eine unendliche Menge besitzt eine abzählbar endliche Teilmenge //

Bew: Wegen **S1.5.7** können wir alle  $A_n$  als abzählbar unendlich und paarweise disjunkt annehmen. Das bedeutet  $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots\}$  mit verschiedenen Elementen  $a_{nm}$  und deshalb ist die Abb  $(n, m) \mapsto a_{nm}$  bij von  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  auf  $A$ . Daraus folgt mit Hilfe von S1.5.8 dieser S1.5.10

Andere Formulierung:

$$A_k = \{a_{kj} : 1 \leq j \leq p_k\} \text{ mit } p_k \in \mathbb{N} \text{ oder } p_k = \infty \forall k \in \mathbb{N}.$$

Bem: a)  $M$  ist höchstens abzählbar bedeutet:  $\exists$  injektive Abb  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{N}$

← a) Sind  $A_k$  paarweise disjunkt, so ist die Abb  $\varphi: a_k \rightarrow (k, \quad)$  abzählbar nach **S1.5.8**

$A \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  im Allgemeinen nicht surjektiv, aber injektiv  $\Rightarrow$  Bem

$A$  höchstens abzählbar

β) Sind  $A_k$  nicht paarweise disjunkt, so  $B_1 := A_1, B_2 := A_1 \setminus B_1, B_3 := A_3 \setminus (B_1 \cup B_2),$  usw ...  $B_k$  paarweise disjunkt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

b)  $|M_1| = n, |M_2| = m \Rightarrow |M_1 \times M_2| = nm$

**S1.5.11** (752) Die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich

Bew: Aus **S1.5.8-S1.5.10** folgt, daß die Menge  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  abzählbar ist.

Die Abb  $(p, q) \mapsto p/q$  ist eine surjektive Abb von  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  auf  $\mathbb{Q}$  und deshalb folgt mit unten stehender **A1.5.15** die Beh.

**A1.5.15** Zeige: Ist  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$  surjektiv, so ist  $A$  höchstens abzählbar.

\*Lös:  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$  surjektiv  $\Rightarrow \forall a \in A$  existiert mindestens ein  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

1. Fall:  $\forall a \in A$  existiert genau ein  $n \in \mathbb{N} : n \mapsto f(n) = a \Rightarrow f$  bij  $\Rightarrow A$  abzählbar  $\infty$ .

2. Fall:  $\exists a_{n+1} \in A$  mit  $g: \{k_{n+1}, k_{n+1}+1, \dots, k_{n+1}+n_{n+1}\} \rightarrow a_{n+1} ???,$

$$n \in \mathbb{N}_0, k, \in \mathbb{N}, n, \quad, k \leq \infty, k, k_{n+1} = k_n + n_{n+1} ??? \Rightarrow$$

$$n \mapsto f(n) = a_n, n \in \mathbb{N}, n \leq \infty \Rightarrow \text{abzählbar } \leq \infty \Rightarrow \text{höchstens abzählbar.}$$

**S1.5.12** (752) Falls  $A$  mindestens 2 Elemente hat, also etwa  $\{0, 1\}$ , dann ist die Menge aller Folgen in  $A$  überabzählbar.

Bew: Sei  $F = (f_1, f_2, f_3, \dots)$  eine (abzählbar unendliche) Menge von Folgen in  $A$ . Dann ist  $f_k = (f_{k1}, f_{k2}, f_{k3}, \dots)$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Da  $A$  mindestens 2 Elemente hat, gibt es eine Folge  $g = (g_1, g_2, g_3, \dots)$  aus  $A$ , für die  $g_n \neq f_{kn}$  gilt  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow g_n \neq f_k \forall k \Rightarrow g \notin F$ . Somit kann eine abzählbar unendliche Menge von Folgen aus  $A$  niemals alle diese Folgen umfassen, woraus die Beh folgt.

Andere Formulierung bzw Aufgabe:

**A1.5.16** Es sei  $F$  die Menge aller 0-1 Folgen aus  $\mathbb{R}$ , d.h.

$$F = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \{0, 1\} \forall n \in \mathbb{N}\}. \text{ Zeige, dass } F \text{ überabzählbar ist.}$$

Lös: Annahme  $F$  ist nicht überabzählbar, d.h.  $F$  ist höchstens abzählbar.

$$|F| = \infty, \text{ denn } \exists (\delta_{nm})_{n=1}^{\infty} \in F \forall m \in \mathbb{N}, \text{ wobei } \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n=m \\ 1 & \text{falls } n \neq m \end{cases} \Rightarrow |F| = \infty$$

$F$  ist abzählbar, d.h. lässt sich in folgender Form

schreiben:  $F = \{ \underbrace{a^{(m)}}_{(a_n)_{n=1}^\infty} : m \in \mathbf{N} \}$

Sei  $a^{(m)} =: (a_{mn})_{n=1}^\infty, m \in \mathbf{N}$

Definiere  $a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{mn} = 1 \\ 1 & \text{falls } a_{mn} = 0 \end{cases} \Rightarrow a_n \neq a_{mn} \quad \forall n \in \mathbf{N}$  und  $a := (a_{mn})_{n=1}^\infty \stackrel{\cong}{\Rightarrow} a_n \in \{0,1\} \quad \forall n \in \mathbf{N}$

$a \in F \Rightarrow \exists m_0 \in \mathbf{N} \quad a = (a_n)_{n=1}^\infty = a^{(m_0)} = (a_{n,m_0})_{n=1}^\infty$ , insbesondere  $a_{m_0} = a_{m_0, n_0}$  für ein  $m_0 \in \mathbf{N}$   
 $\Rightarrow \exists$  Widerspruch zur Def von  $a_{m_0} \Rightarrow$  doch überabzählbar

Bem: Wie wir später sehen werden, folgt aus obigem Satz, daß die Menge der reellen Zahlen in einem beliebig kleinen Intervall  $[a, b]$  mit  $a < b$  immer überabzählbar ist. Da ein solches Intervall nur abzählbar viele rationale Zahlen enthält, ist sogar die Menge der irrationalen Zahlen in  $[a, b]$  überabzählbar.

**A1.5.17** Zeige: Eine beschränkte Teilmenge  $M$  der ganzen Zahlen ist endlich  
 \*Lös: Sei  $n \in \mathbf{N}$ .  $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{0\} \cup \{-n \in \mathbf{N}\}$ .

$$M = P \cup \{0\} \cup L = \{m_+ \in \mathbf{N} \mid m_+ = f(n) \leq \bar{m}\} \cup \{0\} \cup \{-m_- \in \mathbf{N} \mid m_- = f(n) \leq \underline{m}\} \subset \mathbf{Z}$$

$\Rightarrow M$  durch  $\bar{m}$  und  $\underline{m}$  beschränkt  $\Rightarrow \exists$  Abb  $\{n \in \mathbf{N} \mid 1 \leq n \leq \bar{m}\} \rightarrow P$

mit  $n \mapsto f(n) = m_+ \quad \forall n \leq m_+$  d.h. bijektiv  $\Rightarrow |1, 2, \dots, n| \leq \bar{m} \Rightarrow |P| = k \leq \bar{m}$ ,  
 $f(n) = f(k+1) = 0$  bijektiv  $\Rightarrow$

$\exists$  Abb  $\{n \in \mathbf{N} \mid k+1 \leq n \leq \bar{m}\} \rightarrow L$  mit  $n \mapsto f(n) = m_- \quad \forall n \leq m_-$  d.h. bijektiv  $\Rightarrow$

$|k+2, k+3, \dots, k+n| \leq \underline{m} \Rightarrow$

$\exists$  bij Abb  $f: \{1, 2, \dots, (k+n)\} \rightarrow P \cup \{0\} \cup L = M$  mit  $|M| \leq \bar{m} + 1 + \underline{m} \leq \infty$

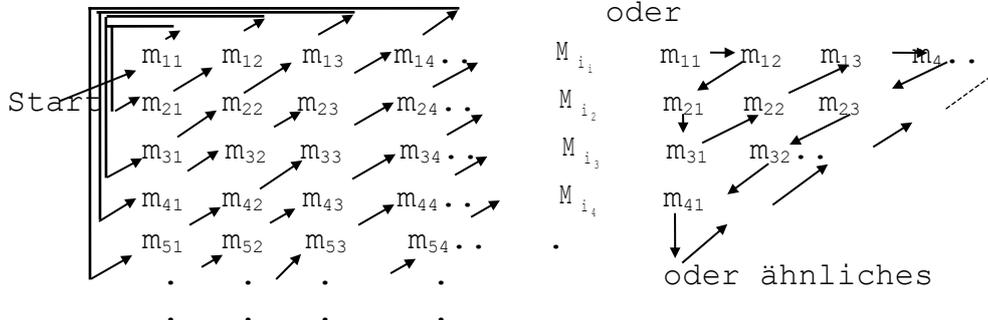
**A1.5.18** Es seien  $a, b \in \mathbf{R}$  mit  $a < b$  und  $f: (a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  injektiv. Zeige, dass  $f((a, b])$  überabzählbar ist.

**A1.5.19** Zeige: Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar, d.h. ist  $I$  eine abzählbare Indexmenge und  $M_i$  abzählbar für alle  $i \in I$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} M_i$  abzählbar.

Bew:  $I$  abzählbar  $\Rightarrow I$  läßt sich in der Form  $I = \{i_v \mid v \in \mathbb{N}\}$  schreiben

(mit paarweise verschiedenen  $i_v$ ).  $M_{i_v}$  abzählbar  $\Rightarrow$

$M_{i_v} = \{m_{v\mu} : \mu \in \mathbb{N}\}$  (mit  $m_{v\mu_1} \neq m_{v\mu_2}, \forall \mu_1 \neq \mu_2, \forall v \in \mathbb{N}$ . (jedes  $M_i, i \in I$  läßt sich als  $M_{i_v}, v \in \mathbb{N}$  schreiben). Betrachte folgendes Schema:



Durchlaufe obiges Schema in Pfeilrichtung und ordne den  $m_{v\mu}$  fortlaufend die Nummer 1, 2, 3... zu, wobei man schon aufgetretene  $m_{v\mu}$ 's überspringt,

d.h.  $1 \quad m_{11}, 2 \quad \begin{cases} m_{11}, \text{ falls } m_{11} \neq m_{11} \\ m_{12}, \text{ falls } m_{11} = m_{11} \end{cases}$  (beachte:  $m_{12} \neq m_{11}$ , da  $m_{11}, m_{12} \in M_{i_1}$ ) usw

Man beachte, dass dieses Verfahren nicht abbricht, da  $M_{i_v} \subset \bigcup_{i \in I} M_i$  und  $M_{i_v}$  eine unendliche Menge ist.

Dadurch erhält man eine bijektive Abb  $\mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{v \in \mathbb{N}} M_{i_v} = \bigcup_{i \in I} M_i$ , also ist  $\bigcup_{i \in I} M_i$  abzählbar.

Bem: Ein exakter mathematischer Beweis obiger Aussage ist relativ aufwendig! Man benötigt z.B. folgende Aussagen:

(.)  $f: X \rightarrow Y$  surjektiv, wobei  $X$  abzählbar  $\Rightarrow Y$  höchstens abzählbar

(..)  $\exists$  bijektive Abb  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  (z.B.  $g^{-1}$ , wobei  $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$g(n, m) := 1/2((n+m)(n+m+1) + m)$

Es reicht eine surjektive Abb.  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  z.B. die

linksinverse der injektiven Abb  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (n, m) \mapsto 2^{n+1} 3^m$

**A1.5.20** Geg sei die Menge aller schließlich konstanten Folgen mit rationalen Gliedern, d.h.

$$M = \{f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q} : \text{Es existiert ein } n_0 \text{ mit } f(n) = f(n_0) \quad \forall n \geq n_0\}.$$

Zeige, dass  $M$  abzählbar ist.

Bew: Def  $M_{q,n_0} = \{f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q} \text{ mit } f(n) = q \quad \forall n \geq n_0\} \Rightarrow M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{q,n_0}$

Wir zeigen:  $M_{q,n_0}$  ist abzählbar  $\forall q \in \mathbf{Q}, n_0 \in \mathbf{N}$ , insbesondere

$$M_{q,1} = \{f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q} : f(n) = q \quad \forall n \in \mathbf{N}\} \Rightarrow |M_{q,1}| = 1. \quad \mathbf{Q}^{n_0-1}$$

Wenn  $n_0 \geq 1$ , dann ist  $M_{q,n_0} = \{f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q} : f(n) = q \quad \forall n \geq n_0\} =$

$$\{(f(1), f(2), \dots, f(n_0-1), q, q, q, \dots) : f(1) \dots f(n_0-1) \in \mathbf{Q}\},$$

Mit anderen Worten:

$T: M_{q,n_0} \rightarrow \mathbf{Q}^{n_0-1}, T(f) = (f(1), \dots, f(n_0-1))$  ist bijektiv und  $\mathbf{Q}^n$  ist abzählbar

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad (\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{Q}^n = \mathbf{Q}^{n-1} \times \mathbf{Q} \text{ ist abzählbar}) \Rightarrow M = \bigcup_{n_0=1}^{\infty} M_{q,n_0} \text{ ist}$$

abzählbar als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen

**A1.5.21** Es seien  $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  und  $f: \{1, \dots, m_1\} \rightarrow \{1, \dots, m_2\}$  bijektiv.  
 Zeige:  $m_1 = m_2$ . (Zur Erinnerung:  $\{1, \dots, m\} := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq m\}$ )

// **D0.2.5** (202) Bem 2.)  $f: X \rightarrow Y$  &  $g: Y \rightarrow Z$  bij  $\Rightarrow g \circ f: X \rightarrow Z$  bij und //  
 //  $(g \circ f)^{-1}: Z \rightarrow X: (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$  //

// **S1.5.2** /702/703) Rechenregeln in  $\mathbb{N}$ :  $\forall m, n \in \mathbb{N}$  gilt //

// 6.)  $m > n \Rightarrow m \geq n+1 \Rightarrow \exists$  natürliche Zahl zwischen  $n$  und  $n+1$  //

//  $(n \neq m \Rightarrow |n-m| \geq 1)$  //

Bew: Wird durch Induktion nach  $m_1 \in \mathbb{N}$  bewiesen.

$A(m_1): m_2 \in \mathbb{N}$  und  $f: \{1, \dots, m_1\} \rightarrow \{1, \dots, m_2\}$  bijektiv  $\Rightarrow m_1 = m_2$ )

$m_1 = 1$ : Sei  $m_2 \in \mathbb{N}$  und  $f: \{1\} \rightarrow \{1, \dots, m_2\}$  bijektiv  
 $\forall n \in \{1, \dots, m_2\}$  gilt:  $f(1) = n$ , da  $f$  surjektiv,  
 (für  $n \in \{1, \dots, m_2\} \exists k \in \{1\}$  mit  $f(k) = n$ , d.h.  $f(1) = n$ )  
 insbesondere  $1 = f(1) = m_2$  (da  $1$  und  $m_2 \in \{1, \dots, m_2\}$ ), also  
 $m_1 = 1 = m_2$  d.h.  $A(1)$  ist wahr

$m_1 \xrightarrow{m_1 \geq 1} m_1 + 1$ : (Induktionsschluß:  $A(m_1) \Rightarrow A(m_1 + 1)$ )

Es sei  $m_2 \in \mathbb{N}$  und  $f: \underbrace{\{1, \dots, m_1\}}_{=: M_1} \rightarrow \underbrace{\{1, \dots, m_2\}}_{=: M_2}$  bijektiv,

Z.z.  $m_1 + 1 = m_2$

$m_2 \in M_2 \xRightarrow{f \text{ surjektiv}} \exists n_0 \in M_1: f(n_0) = m_2 \Rightarrow$

$f|_{M_1 \setminus \{n_0\}}: M_1 \setminus \{n_0\} \rightarrow \underbrace{M_2 \setminus \{m_2\}}_{=: \{1, \dots, m_2 - 1\}}$  bijektiv (wie man leicht

nachprüft)

(Bew:  $M_2 \setminus \{m_2\} = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq m_2 \text{ und } n \neq m_2\} \xRightarrow{S1.5.2} \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq m_2 - 1\} = \{1, \dots, m_2 - 1\}$ )

Definiere  $g: M \setminus \{n_0\} \rightarrow \{1, \dots, m_1\}$  durch

$g(n) = \begin{cases} n, & \text{falls } 1 \leq n \leq n_0 - 1 \\ n - 1, & \text{falls } n_0 \leq n \leq m_1 \end{cases}$  (beachte:  $g$  ist

wohldefiniert, da  $g(n) \in \{1, \dots, m_1\} \forall n \in M_1 \setminus \{n_0\}$ ).

Dann ist  $g$  bijektiv, wie man leicht nachrechnet:

$g$  surjektiv: Sei  $m \in \{1, \dots, m_1\}$  bel..

Def  $n := \begin{cases} m, & \text{falls } 1 \leq m \leq n_0 - 1 \\ m + 1, & \text{falls } n_0 \leq m \leq m_1 \end{cases} \Rightarrow g(n) = m \text{ und } n \in M \setminus \{n_0\}$

$g$  injektiv: Seien  $g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$  oder  $n_1 - 1 = n_2 - 1 \Rightarrow n_1 = n_2$   
 $\Rightarrow g^{-1}: \{1, \dots, m_1\} \rightarrow M_1 \setminus \{n_0\}$  bijektiv  $\xRightarrow{D0.2.5 \text{ Bem 2}}$

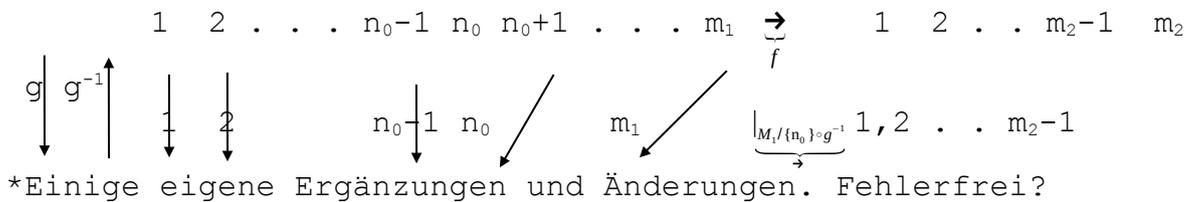
$f|_{M_1 \setminus \{n_0\}} \circ g^{-1}: \{1, \dots, m_1\} \rightarrow \{1, \dots, m_2 - 1\}$  bijektiv

Kombination bijektiver Abb ist bij.

$\Rightarrow m_1 = m_2 - 1$

IndHyp

$\Rightarrow m_1 + 1 = m_2$



$m_1 \geq m_1+1 = m'_1 : (\text{Induktionsschluß: } A(m_1) \Rightarrow A(m_1+1))$

Es sei  $m_2 \in \mathbb{N}$  und  $f: M'_1 := \underbrace{1, \dots, m_1+1}_{=: M'_1} \rightarrow \underbrace{\{1, \dots, m_2\}}_{=: M_2}$  bijektiv

Z.z.  $m_1+1 = m_2$

$m_2 \in M_2 \Leftrightarrow \exists n_0 \in M'_1 : f(n_0) = m_2 \Rightarrow$

$f|_{M'_1 \setminus \{n_0\}} : M'_1 \setminus \{n_0\} \rightarrow \underbrace{M_2 \setminus \{m_2\}}_{=: \{1, \dots, m_2-1\}}$  bijektiv (wie man leicht

nachprüft) (Bew:  $M_2 \setminus \{m_2\} = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq m_2 \text{ und } n \neq m_2\} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq m_2-1\} = \{1, \dots, m_2-1\}$ )

Definiere  $g: M'_1 \setminus \{n_0\} \rightarrow \{1, \dots, m_1\}$  durch

$$g(n) = \begin{cases} n, & \text{falls } 1 \leq n \leq n_0-1 \\ n-1, & \text{falls } n_0+1 \leq n \leq m_1 \end{cases} \quad (\text{beachte: } g \text{ ist}$$

wohldefiniert, da  $g(n) \in \{1, \dots, m_1\} \forall n \in M'_1 \setminus \{n_0\}$ ).

Dann ist  $g$  bijektiv, wie man leicht nachrechnet

$g$  surjektiv: Sei  $m \in \{1, \dots, m_1\}$  bel..

$$\text{Def } n := \begin{cases} m, & \text{falls } 1 \leq m \leq n_0-1 \\ m+1, & \text{falls } n_0 \leq m \leq m_1 \end{cases} \Rightarrow g(n) = m \text{ und } n \in M'_1 \setminus \{n_0\}$$

$g$  injektiv: Seien  $g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$  oder  $n_1-1 = n_2-1 \Rightarrow n_1 = n_2$

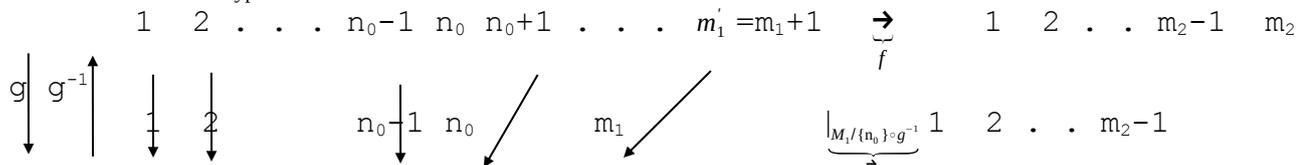
$\Rightarrow g^{-1}: \{1, \dots, m_1\} \rightarrow M'_1 \setminus \{n_0\}$  bijektiv D0.2.5 Bem 2

$f|_{M'_1 \setminus \{n_0\}} \circ g^{-1} = \{1, \dots, m_1\} \rightarrow \{1, \dots, m'_1\} \setminus \{n_0\} \rightarrow \{1, \dots, m_2-1\}$  bijektiv

Kombination bijektiver Abb ist bij.

$\Leftrightarrow m_1 = m_2 - 1$

IndHyp



**S1.5.13** (758) Vor:  $M \subset \mathbb{R}$ ,  $M \neq \emptyset$  und  $M$  endlich

Beh:  $M$  besitzt ein Minimum und ein Maximum

Bem:  $|N| = \infty$  unbeschränkt, andernfalls  $\exists m = \max N$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und  $m+1 \in N$

Widerspruch

Bew:  $A_{(n)}$ : Jede  $n$  elementige Menge hat  $\max$  und  $\min$

$$n=1: M = \{a_1\} \Rightarrow a_1 = \max M = \min M$$

$$n=2: M = \{a_1, a_2\} \Rightarrow a_1 \leq a_2 \Rightarrow a_1 = \min M, a_2 = \max M$$

$$a_1 < a_2 \Rightarrow a_1 = \min M, a_2 = \max M$$

$$n \rightarrow n+1: M = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\}$$

$$\max M = \max\{\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, a_{n+1}\}$$

$$\min M = \min\{\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, a_{n+1}\}$$

$$\exists \max, \min$$

Andere Formulierung:

Induktion nach der Elementezahl von  $M \subset \mathbb{R}$ :

$A_{(n)}$ : jede Menge  $M$  mit  $|M|=n$  hat  $\max$  und  $\min$

$$n=1: M = \{a_1\} \text{ mit } a_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow a_1 = \max M = \min M$$

$n \rightarrow n+1$ : Sei  $M$  eine Menge mit  $|M|=n+1$ , d.h.

$$M = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\} =: M' \cup \{a_{n+1}\},$$

$|M'| = n$ . Nach IndHyp gilt:

$$\exists \min M' = a_{v_1} \text{ und } \exists \max M' = a_{v_2}.$$

$$\leq a_{v_1} \quad a_{n+1} \leq a_{v_2} \Rightarrow a_{v_1} = \min M, a_{v_2} = \max M$$

$$a_{n+1} < a_{v_1} \quad a_{v_2} \Rightarrow a_{n+1} = \min M, a_{v_2} = \max M$$

$$\leq a_{v_1} \quad a_{v_2} < a_{n+1} \Rightarrow a_{v_1} = \min M, a_{n+1} = \max M$$

d.h.  $M$  hat  $\min$  und  $\max$

#### **D1.5.4** (758)

1.) Die Teilmenge von  $\mathbb{R}$ :  $\mathbb{Z} = \{a \in \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } -a \in \mathbb{N}\}$  heißt Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$

2.) Die Teilmenge von  $\mathbb{R}$ :  $\mathbb{Q} = \{p/q \in \mathbb{R} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ , heißt Menge der rationalen Zahlen in  $\mathbb{R}$

3.) Die Teilmenge von  $\mathbb{R}$ :  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  heißt die Menge der irrationalen Zahlen  $\mathbb{R}$  (z.B.  $\sqrt{2}$ )

$$4.) \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

$$5.) \forall x \in \mathbb{R}: -\infty < x < \infty$$

$$6.) -\infty = (-1)\infty$$

$$7.) \forall x \in \mathbb{R}: \infty + x = \infty$$

$$8.) \forall x \in \mathbb{R}_+: \infty x = \infty$$

$$\infty * x = \begin{cases} \infty & \text{falls } x > 0 \\ -\infty & \text{falls } x < 0 \end{cases}, \quad 0 * \infty \text{ nicht definiert}$$

$$9.) \infty + \infty = \infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty, \quad \infty * \infty = \infty, \quad (-\infty) * \infty = -\infty, \quad (-\infty) * (-\infty) = \infty$$

$$10.) \frac{x}{\pm\infty} := 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

11.)  $\bar{\mathbb{R}}$  ist kein Körper (siehe nicht Definiertes)

Bem zu 1.), 2.)

Für die Elemente von  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$  ist in natürlicher Weise eine Addition und eine Multiplikation definiert, denn diese Operationen sind für alle reellen Zahlen definiert, also auch für die Elemente einer Teilmenge. Fraglich ist höchstens, ob das Ergebnis dieser Operationen wieder zur Menge gehört; dies ist im folgenden enthalten:

Andere Formulierungen zu 1. und 2.):

$\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$  sind abgeschlossen bzgl Addition und Multiplikation, d.h. für  $a, b \in \mathbb{Z} (\in \mathbb{Q})$  sind auch  $a+b, ab \in \mathbb{Z} (\in \mathbb{Q})$ . Ferner gelten in  $\mathbb{Z}$  die Axiome (A1)-(A4) sowie (M1), (M2), (M4), (D) und man nennt  $\mathbb{Z}$  deshalb einen kommutativen Ring mit Einselement. In  $\mathbb{Q}$  gelten alle Axiome eines Körpers. Man nennt  $\mathbb{Q}$  auch den Quotientenkörper von  $\mathbb{Z}$ .

Bew: die Abgeschlossenheit ergibt sich direkt aus der Def und

den Rechenregeln für Brüche, z.B.:  $p_1/q_1 + p_2/q_2 = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$ .

Die Gültigkeit der Axiome ergibt sich, da für  $a \in \mathbb{Z}$  auch  $-a \in \mathbb{Z}$  ist (genauso für  $\mathbb{Q}$ ) und da für  $a = p/q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  auch  $a^{-1} = q/p \in \mathbb{Q}$  ist.

Bem zu 4.)-9.)

Es gilt das Kommutativgesetz, Distributivgesetz und Assoziativgesetze gelten, soweit bei der Anwendung keine undefinierten Ausdrücke entstehen. Beachten:  $\infty + (-\infty)$  und  $0 * \infty$  sind hier nicht definiert.

**A1.5.22** Zeige, daß folgende zusätzliche Rechenregeln gelten

- a)  $\forall x \in \mathbb{R}: -\infty + x = -\infty$
- b)  $\forall x \in \mathbb{R}_+: x(-\infty) = -\infty, (-x)\infty = -\infty, (-x)(-\infty) = \infty$
- c)  $-\infty + (-\infty) = -\infty, (-\infty)\infty = -\infty, (-\infty)(-\infty) = \infty$

**A1.5.23** Zeige, dass es nicht möglich ist, die Ausdrücke  $\infty + (-\infty)$  und  $0 * \infty$  so zu definieren, daß  $\bar{\mathbb{R}}$  zu einem Körper wird.

**S1.5.14** (760)

1.)  $\forall m, n \in \mathbb{Z}$  ist  $m \pm n, m \cdot n \in \mathbb{Z}$  ( $\mathbb{Z}, +$ ) ist Abelsche Gruppe

Bew: folgt aus S1.5.2 (RR für  $\mathbb{N}$ ) und D1.5.4 1.

2.)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$  ist ein angeordneter Körper (Unterkörper von  $\mathbb{R}$ ),  
 der nicht vollständig ist (echt in  $\mathbb{R}$  enthalten ist)

// **S1.3.2** (513) Vor: Sei  $x \geq 0, x \in \mathbb{R}$ . Beh:  $\exists$  genau ein  $y: \sqrt{x} \in \mathbb{R}$  mit  $y \geq 0$  und  $y^2 = x$  //

Bew: Wegen der Bruchrechenregeln in einem Körper ist  $\mathbb{Q}$   
 abgeschlossen bzgl  $+$  und  $\cdot$  (führt aus  $\mathbb{R}$  nicht heraus).

$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .  $T = \{t \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq t, t^2 \leq 2\}$  kein sup in  $\mathbb{Q}$

aber in  $\mathbb{R}$ . Analog zu Beweis in **S1.3.2**  $\Rightarrow \exists \sup T = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

3.)  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  sind abzählbar,  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sind überabzählbar

Bew:  $\mathbb{N}: \text{id}_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$  abzählbar.

$\mathbb{Z}: \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ,

$a_1 = 0, a_k = n, k = 2n, a_k = -n, k = 2n+1 \quad n \in \mathbb{N}$   
}   
 bij Abb alle  $\mathbb{N}$  auf  $\mathbb{Z}$

siehe Beh

$\mathbb{Q}: \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}. \quad \mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}. \quad \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$

	1	2	3	4	
1	1	2	3	4	$(1) + (1/2 + 2/1) + (1/3 + 3/1) + (1/4 + 2/3 + 3/2 + 4/1) +$
2	$1/2$	$2/2$	$3/2$	$4/2$	$(a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \dots$
3	$1/3$	$2/3$	$3/3$	$4/3$	$\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$ (ähnlich $\mathbb{Q}^+$ ) $\Rightarrow \mathbb{Q}$ abzählbar
4	$1/4$	$2/4$	$3/4$	$4/4$	$(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ ist nicht abzählbar ??????

S1.5.17: Jedes  $x \in (0, 1]$  lässt sich eindeutig als unendlicher Dezimalbruch darstellen:  $x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$  mit  $a_v \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\} \quad \forall v \in \mathbb{N}$ .

Annahme  $(0, 1] = (x_v)_{v=1}^{\infty}$

$x_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots$  Annahme alle reellen Zahlen kommen

$x_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots$  hier vor ist falsch

$x_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots$  Widerspruch

$x_4 = 0, a_{41} a_{42} a_{43} \dots$

Definiere  $x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$  mit  $b_n \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}, b_n \neq a_{nn} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$   
 $x \in (0, 1] \ \& \ x \neq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$  Widerspruch

Andere Formulierung:

$$\mathbb{Q} = \{p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, |p|, q \text{ teilerfremd}\},$$

$$\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, p/q \mapsto (p, q)$$

$$M = \{p, q\} \text{ mit } |p|, q \text{ teilerfremd}$$

$$\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow M \text{ injektiv} \stackrel{\text{Beh}}{\Rightarrow} \text{ abzählbar}$$

$$a_v \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\} \quad \forall v \in \mathbb{N} \quad \text{Ann: } (0, 1] = (x_v)_{v=1}^{\infty}$$

S1.5.17:

$$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{13} \dots$$

$$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \dots$$

$$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \dots$$

usw

Ann: alle reellen Zahlen

kommen hier vor....

sind das alle? Widerspruch

Definiere  $x = 0, b_1b_2b_3b_4 \dots b_n$  mit

$$b_n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\} \quad b_n \neq a_{nn} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{d.h. } b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, b_3 \neq a_{33} \dots) \Rightarrow$$

$$x \in (0, 1] \text{ und } x \neq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ Widerspruch}$$

Andere Formulierung:

Idee:  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ :  $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$  ist nicht abzählbar.

S1.5.17 Jedes  $x \in (0, 1]$  lässt sich eindeutig als unendlicher

Dezimalbruch schreiben:  $x = 0, a_1a_2a_3a_4a_5 \dots$

wir sehen hieraus, dass sich jede Zahl  $x \in [0, 1)$  als

Dezimalzahl darstellen lässt, d.h.

$x = 0, x_1x_2x_3x_4 \dots$  mit  $x_v \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , aber  $\exists$  kein  $v_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$x_v = 9 \quad \forall v \geq v_0$$

Annahme:  $[0, 1)$  ist abzählbar  $\{y_v \in [0, 1), v \in \mathbb{N}\}$

$$y_v = 0, \underline{x}_1^{(v)} \underline{x}_2^{(v)} \underline{x}_3^{(v)} \dots, \dots v \in \mathbb{N}, \quad \tilde{y}_v := \begin{cases} 4 \text{ falls } x_v^{(v)} \neq 4 \\ 5 \text{ falls } x_v^{(v)} = 4 \end{cases}$$

$$y_1 = 0, \underline{x}_1^{(1)} \underline{x}_2^{(1)} \underline{x}_3^{(1)}, \dots$$

$$y_2 = 0, \underline{x}_1^{(2)} \underline{x}_2^{(2)} \underline{x}_3^{(2)}, \dots \text{ unterstrichene geändert}$$

$$\tilde{y} = 0, \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \dots \in [0, 1) = y_v \quad \forall v$$

Also  $[0, 1)$  überabzählbar, also  $\mathbb{R} \supset [0, 1)$  überabzählbar

Andere Formulierung:

S1.5.17: Jedes  $x \in (0, 1]$  lässt sich eindeutig als unendlicher

Dezimalbruch schreiben:  $x = 0, a_1a_2a_3a_4a_5 \dots$

$$\text{Falsche Annahme: } x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{13} \dots$$

$$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \dots$$

$$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \dots \text{ usw ist Abzählung aller reellen Zahlen in } [0, 1)$$

Sei  $s = 0, s_1s_2s_3s_4 \dots \in [0, 1)$  &  $s_i = (a_{ii} + 1)$  falls  $a_{ii} \neq 9$ ,  $s_i = 0$  falls  $a_{ii} = 9 \Rightarrow s_i \neq a_{ii} \quad \forall i \Rightarrow s \neq x_n \quad \forall n \Rightarrow \text{Widerspruch}$

**A1.5.24** Bestimme, falls existent,  $\sup M$ ,  $\max M$ ,  $\inf M$ , und  $\min M$  für folgende Mengen:

$$a) M = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \quad b) M = \{x^2 - 10x - 24 : x \in (1, 3)\} \quad c) M = [1, \sqrt{2}] \quad (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

**A1.5.25** Zeige:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: 1/n < \varepsilon$

**A1.5.26** Zeige:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: (n^2 - 5)^{-1} < \varepsilon$

**A1.5.27** Zeige: Ist  $z \in \mathbb{C}$  und  $|z| \leq 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , so folgt  $z = 0$

**S1.5.15** (759)

1.)  $\forall a \in \mathbb{R} \exists$  das größte Ganze von  $a$ , d.h.  $\exists [a] \in \mathbb{Z}$  mit  
 $[a] \leq a < [a]+1$ ,  $[a] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq a\}$

// **S1.5.5** (706) Wohlordnungss, Vor:  $M \subset \mathbb{N}$  und  $M \neq \emptyset$ , Beh:  $\exists \min M$  //

Bew: Sei  $a > 0$ :  $T = \{n \in \mathbb{N} \mid n > a \in \mathbb{R}_+\} \stackrel{S1.5.14}{\neq} \emptyset$ ,  $T \subset \mathbb{N} \stackrel{S1.5.4}{\Rightarrow} \exists \underline{m} = \min T$ ,  $\underline{m} \in \mathbb{N}$ ,  $a < \underline{m} \Rightarrow$

$$\underline{m}-1 \leq a < \underline{m} \Rightarrow [a] = \underline{m}-1 \leq a < \underline{m}.$$

Sei  $a \leq 0$ :  $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow [a] = a$  (dann gilt  $a \leq a \leq a+1$ ).

Sei  $a < 0$ :  $a \notin \mathbb{Z} \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow \exists [-a] < -a < [-a]+1 \Rightarrow -[-a] > a > -[-a]-1 \Rightarrow$   
 $-[-a]-1 < a < -[-a]-1+1 \Rightarrow [a] = -[-a]-1$

Bsp  $-3,5$ :  $-a = 3,5 \Rightarrow [-a] = 3 \Rightarrow -[-a]-1 = -4$

2.)  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$  (.)  $\exists q \in \mathbb{Q}$  mit  $a < q < b$  und (..)  $\exists d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $a < d < b$

Bew: (.)  $\varepsilon = b-a > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ :  $2/n < \varepsilon$

Ansatz  $q := \frac{[nb]-1}{n} \in \mathbb{Q}$ ,  $q \leq \frac{nb-1}{n} = b-1/n < b$

$q := \frac{[nb]+1-2}{n} > \frac{nb-2}{n} = b-2/n > b- \underbrace{\varepsilon}_{|b-a|} = a \Rightarrow a < q < b$

(..) O.B.d.A.: Sei  $a \in \mathbb{Q}$  (sonst betrachte  $q, b$ ).

Sei  $\varepsilon = b-a$ ,  $2/n < \varepsilon$ ,  $d = a + \frac{\sqrt{2}}{n}$  ( $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ )  $\Rightarrow d > a$ ,  $d < a + 2/n < a + \varepsilon = a + (b-a) = b \Rightarrow$   
 $a < d < b$

Benutze:  $1 < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2} \sqrt{2} = 2$

Andere Formulierung:

Zwischen 2 bel reellen Zahlen liegt immer eine rationale Zahl

Bew: Seien  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Nach obiger A1.5.25  $\exists q \in \mathbb{N}$ :  $1/q < b-a$ .

Betrachte die rationalen Zahlen  $r_j = [a] + j/q$ , für  $j \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Die Ungleichung  $r_j \leq a$  gilt sicher für  $j=0$ , aber nicht für  $j \geq q \Rightarrow \exists$  maximales  $j_0$  mit  $r_{j_0} \leq a \Rightarrow r_{j_0+1} > a$  aber  $r_{j_0+1} < b$  nach Def von  $q$ .

$$(a \geq r_{j_0+1} = \underbrace{r_{j_0}}_{\leq a} + \underbrace{\frac{1}{q}}_{\leq b-a} < a+b-a=b)$$

3.) Zwischen 2 beliebigen rationalen Zahlen liegt immer eine irrationale Zahl

Bew:  $a, b \in \mathbb{Q}, a < b$ . Nach folgender A1.5.29 gibt es mindestens eine positive irrationale Zahl  $\varepsilon$ . Nach S Archimedes  $\exists$  ein  $n \in \mathbb{N}$ :  $n > \varepsilon / (b - a)$ , also  $\varepsilon / n < b - a$ . Da  $a + \varepsilon / n$  irrational sein muß (warum?), folgt die Beh.

Andere Formulierung:

Vorbetrachtung:  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Annahme  $\sqrt{2} = p/q, p, q \in \mathbb{N}$  teilerfremd,  $p^2/q^2 = 2, p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2$  teilt  $p$ , d.h.  $p = 2p' \Rightarrow 4p'^2 = 2q^2 \Rightarrow 2p'^2 = q^2 \Rightarrow 2$  teilt  $q$  Widerspruch

Bew: oBdA  $a \in \mathbb{Q}, r = a + \frac{\sqrt{2}}{n_0} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ( $n_0$  wie oben),  $a < r < b$  (wie oben)

Nachtrag zu Bew S1.5.17

$M = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 \leq 2\}$ . (Falsche) Annahme:  $\exists \sup M$  in  $\mathbb{Q}$ , so sagen wir  $q := \sup M$  ( $q$  rational  $\neq \sqrt{2}$ )

1. Fall  $q > \sqrt{2} \Rightarrow \exists q' \in \mathbb{Q} : q > q' > \sqrt{2} \Rightarrow q'^2 > 2 \Rightarrow$

$q'$  ist obere Schranke  $< \sup M$  Widerspruch

2. Fall  $q < \sqrt{2}$  analog... Widerspruch  $\Rightarrow \mathbb{Q}$  ist nicht vollständig

#4.)  $\rho, \varepsilon \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 \exists r \in \mathbb{Q} : \rho - \varepsilon < r < \rho + \varepsilon$ , d.h.  $r$  liegt zwischen  $\rho - \varepsilon$  und  $\rho + \varepsilon$ .

//S1.5.4 (705) Archimedisches Prinzip//

//  $\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : a < n$  (d.h.  $\mathbb{N}$  ist in  $\mathbb{R}$  nach oben nicht beschränkt)//

//S1.5.5 (706) Wohlordnungss, Vor:  $M \subset \mathbb{N}$  und  $M \neq \emptyset$ , Beh:  $\exists \min M$ //

# Bew:  $m \in \mathbb{N}$ , wähle  $1/m \leq \varepsilon : \rho - \varepsilon < r < \rho + \varepsilon \Rightarrow \rho - 1/m < r < \rho + 1/m$

#  $\rho \geq 0 : \exists n_0 \geq m\rho \stackrel{S1.5.4.1.)}{\geq} \forall n_0 \exists k \leq n_0 \Rightarrow k-1 \leq m\rho < k$

#  $r := k/m \Rightarrow r - 1/m \leq \rho < r \Rightarrow r \leq \rho + 1/m \wedge \rho - 1/m < r$

# d.h.  $r \in \mathbb{Q}$  liegt zwischen  $\rho - \varepsilon$  und  $\rho + \varepsilon$ .

#  $\rho < 0 : -\rho > 0 \Rightarrow \exists r : -\rho - \varepsilon < r < -\rho + \varepsilon \Rightarrow \rho + \varepsilon > -r > \rho - \varepsilon \Rightarrow$

#  $-r \in \mathbb{Q}$  liegt für  $\rho < 0$  zwischen  $\rho - \varepsilon$  und  $\rho + \varepsilon$

#5.)  $\rho \in \mathbb{R}, \exists$  eine Folge  $(r_n) \in \mathbb{Q}, r_n \nearrow$  oder  $\searrow : \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \rho$

# Bew:  $\rho \in \mathbb{R} \stackrel{4.)}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N} \exists r_n : |r_n - \rho| < 1/n \Rightarrow r_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \rho$

A1.5.28 Zeige:  $\mathbb{Q}$  ist ein geordneter Körper.

**A1.5.29** Zeige: Die Menge der rationalen Zahlen  $r$  mit  $0 < r^2 \leq 2$  ist nicht leer, nach oben beschränkt und besitzt (in  $\mathbb{Q}$ ) kein Supremum.

SchlieÙe hieraus:

- a) Der Körper  $\mathbb{Q}$  ist nicht vollständig.
- b) Es gibt mindestens eine positive irrationale Zahl.

**A1.5.30** Zeige: Jedes offene Intervall in  $\mathbb{R}$  enthält unendlich viele rationale, aber auch irrationale Zahlen.

**S1.5.16** (764) (Division mit Rest)

$\forall p \in \mathbb{Z}$  und  $n \in \mathbb{N} \exists$  eindeutig bestimmte Zahlen  $q \in \mathbb{Z}$  und  $r \in \{0, \dots, n-1\}$  mit  $p = nq + r$

Bew: Wenn die behauptete Gleichung gilt, folgt  $p/n = q + r/n$  und  $0 \leq r/n < 1$ . Also muß  $q = p/n - r/n = [p/n]$  gelten, woraus die Eindeutigkeit von  $q$  und dann auch von  $r$  folgt. Umgekehrt sei  $q = [p/n]$ , also  $p/n = q + \xi$  mit  $0 \leq \xi < 1$ . Dann ist  $p = nq + n\xi$  und  $p = nq + r$  mit  $r = n\xi = (p - nq) \in \mathbb{Z}$  und  $0 \leq r < n$  (da  $n \cdot \xi < n$ ), woraus die Existenz der  $q$  und  $r$  folgt.

Andere Formulierung, jedoch mit Einschränkung auf  $\mathbb{N}$ :

Sei  $m \in \mathbb{N}$  fest.  $\forall n \in \mathbb{N} \exists q, r \in \mathbb{N}_0$  mit  $n = qm + r$  &  $0 \leq r < m$  und  $q, r$  sind eindeutig bestimmt.

Bew: Induktion nach  $n$

$N = \{n \in \mathbb{N} \mid n = qm + r, 0 \leq r < m, q, r \in \mathbb{N}_0\}$  ( $n$  hier noch nicht alle  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$1 \in \mathbb{N}$ , da: 1. Fall:  $m=1: 1=1 \cdot 1 + 0$

2. Fall:  $m > 1: 1 = 0 \cdot m + 1$

$n \in \mathbb{N}$ , d.h.  $n = qm + r, 0 \leq r < m \Rightarrow$

$n+1 = qm + r + 1, 0 \leq r+1 \leq m$

1. Fall:  $r+1 < m \Rightarrow$  Darstellung von  $n+1$  in der gewünschten Art  $\Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$

2. Fall:  $r+1 = m \Rightarrow n+1 = qm + m = (q+1)m \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow N$  induktiv  $\Rightarrow N = \mathbb{N} \Rightarrow$  Beh

Eindeutigkeit:

Annahme  $n = qm + r = \bar{q}m + \bar{r}, 0 \leq r, \bar{r} < m \Rightarrow (q - \bar{q})m = \bar{r} - r \Rightarrow \bar{r} \neq r \Rightarrow$

Annahme  $\bar{r} > r$  möglich  $\Rightarrow (q - \bar{q})m > 0 \Rightarrow q > \bar{q} \Rightarrow q \geq \bar{q} + 1 \Rightarrow$

$n = qm + r \geq (\bar{q} + 1)m + r = \bar{q}m + m + r > \bar{q}m + \bar{r} = n \Rightarrow n > n \Rightarrow$  Widerspruch  $\Rightarrow \bar{r} = r$  und  $\bar{q} = q$

**S1.5.17** (764) ( $g$ -Adische Zahlendarstellung)

Sei  $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Dann gibt es für alle  $n \in \mathbb{N}$  eindeutig bestimmte Zahlen  $p \in \mathbb{N}_0$  und  $z_k \in \{0, 1, \dots, g-1\}$  mit  $0 \leq k \leq p, \text{ sodass } n = z_0 + z_1g + \dots + z_pg^p, z_p \neq 0.$

Bew: Die Beh ist richtig für  $n \leq g-1$  (mit  $p=0$  und  $z_0=n$ ).

Ist  $n \geq g$ , so existieren nach S1.5.16 eindeutig bestimmte Zahlen

$z_0 \in \{0, 1, \dots, g-1\}$  und  $m \in \mathbb{Z}$  mit  $n = mg + z_0$ . Offenbar ist sogar  $0 < m < n$ .

Eine Anwendung der Induktionshypothese auf die Zahl  $m$  ergibt dann die gewünschte Zerlegung für  $n$ .

Andere Formulierung:

Es sei  $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  fest gegeben. Dann gilt für jede natürliche Zahl

$$n: n = \sum_{v=0}^p \alpha_v g^v \text{ mit } p := \max\{v \in \mathbb{N}_0 : g^v \leq n\}, \alpha_v \in \{0, 1, \dots, g-1\}$$

Bew: Diese Darstellung ist eindeutig und folgt aus der Division

$$\text{mit Rest: } n/g^p = \underbrace{\alpha_p}_{\in \{0, 1, \dots, g-1\}} + r_p/g^p, \quad 0 \leq r_p < g^p, \quad r_p/g^{p-1} = \alpha_{p-1} + r_{p-1}/g^{p-1}$$

$$\text{usw. Für } x > 0, \quad x = \underbrace{[x]}_{\text{siehe oben}} + \underbrace{x - [x]}_{x \in [0, 1)}$$

**A1.5.31** Finde die Dual- und die Hexadezimaldarstellung (d.h. die  $g$ -adischen Darstellungen mit  $g=2$  und  $g=16$ ) der Zahlen  $n=24$ ,  $n=123$ ,  $n=315$ . Benutze dabei für  $g=16$  die Bezeichnungen A, B, C, D, E, F für die Ziffern 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Lös:  $g=2$ ,

$$g^0=1, g^1=2, g^2=4, g^3=8, g^4=16, g^5=32, g^6=64, g^7=128, g^8=256$$

$$n=24: 24:16=1R8, \quad 8:8=1R0$$

$$=1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \Rightarrow 11000_2.$$

$$n=123: 123:64=1R59:32=1R27:16=1R11:8=1R3:2=1R1$$

$$=1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0 \Rightarrow 1111011_2.$$

$$n=315: 315:2=157R1 \Rightarrow z_0=1 \quad 9:2=4R1 \Rightarrow z_5=1$$

$$157:2=78R1 \Rightarrow z_1=1 \quad 4:2=2R0 \Rightarrow z_6=0$$

$$78:2=39R0 \Rightarrow z_2=0 \quad 2:2=1R0 \Rightarrow z_7=0$$

$$39:2=19R1 \Rightarrow z_3=1 \quad 1 < 2 \Rightarrow z_8=1$$

$$19:2=9R1 \Rightarrow z_4=1$$

$$=100111011_2.$$

$$g=16,$$

$$n=24: 24:16=1R8 \Rightarrow 18_{16}.$$

$$n=315: 315:16=19R11 \Rightarrow z_0=B$$

$$19:16=1R3 \Rightarrow z_1=3$$

$$=13B_{16}.$$

\*Andere Formulierung:

$$g=2 \quad z_k \in \{0, 1\}, \quad p \in \mathbb{N}_0, \quad z_{k_{16}} \in \{0, 1, \dots, 9A, B, \dots, E, F\},$$

$$n = z_0 + z_1 g + \dots + z_p g^p$$

$$24 = 2^? \Rightarrow 2^4 + \underbrace{\Delta}_{8=2^3} = 0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = 11000 \text{ (binär)}$$

$$= 16^? \Rightarrow 16^1 + 8 = 8 + 1 \cdot 16 = 18 \text{ (hex)}$$

$$123 = 2^? \Rightarrow \underbrace{64}_{2^6} + \underbrace{59}_{=1+1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6} = 111111 \text{ (bin)}$$

$$\begin{array}{r} \underbrace{32}_{2^5} + \underbrace{27}_{=16+11} \\ \underbrace{2^5} \quad \underbrace{2^4} \quad \underbrace{8+3} \\ \underbrace{2^3} \\ \underbrace{2+1} \\ \underbrace{2^1} \quad \underbrace{2^0} \end{array}$$

$$123 = 16^? \Rightarrow \frac{7 \cdot 16}{112+11} = B + 7 \cdot 16 = 1B \text{ (hex)}$$

**A1.5.32** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv. Zeige, daß  $f((a, b])$  überabzählbar ist.

**A1.5.33** Untersuche, welche der oben eingeführten Intervalle nach oben (unten) beschränkt sind

**A1.5.34** Bestimme, falls existent,  $\sup(\inf)$ ,  $\max(\min)$  der oben eingeführten Intervalle.

**D1.5.5** (766) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  halboffenes Intervall

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  halboffenes Intervall

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  offenes Intervall

$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ ,  $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ ,

$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ ,  $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ ,  $(-\infty, \infty)$  sind unbeschränkte Intervalle

**S1.5.18** (766) Intervallschachtelungsprozess

Vor: Seien  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $a_n \leq b_n$  mit  $I_{n+1} \subset I_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

Beh:  $\exists$  mindestens ein  $x \in \mathbb{R} : x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ , d.h.  $a_n \leq x \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$

Bem: 1.)  $a_{n+1} \geq a_n$ ,  $b_{n+1} \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_m \leq a_n$ ,  $\forall m \geq n$ ,  $b_m \leq b_n$ ,  $\forall m \geq n$

2.) Aussage entspricht Axiom Vollständigkeit

// **D1.3.2** (504)  $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$  heißt vollständig (bezüglich  $<$ ):  $\Leftrightarrow \forall T \subset \mathbb{K}$ ,  $T \neq \emptyset$  // und  $T$  nach oben beschränkt  $\exists \sup T \in \mathbb{K}$ . Ein angeordneter, vollständiger // // (bzgl Anordnung) Körper heißt Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  //

Bew:  $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset I_n = [a_n, b_n] \forall n \in \mathbb{N}$

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \dots \leq a_n \leq b_m \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ ,  $n > m \Rightarrow a_n \leq b_m \forall n, m \in \mathbb{N}$

$T := \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ ,  $T \neq \emptyset$  (alle linken Endpunkte zu  $T$  zusammengefaßt)

Jedes  $b_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  ist obere Schranke von  $T$

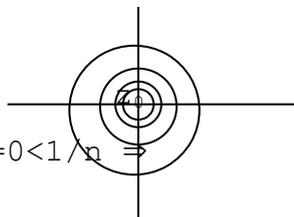
D1.3.28  $\Rightarrow \exists x : \sup T \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n \leq x \forall n \in \mathbb{N}$ .

$x$  ist kleinste obere Schranke von  $T \Rightarrow x \leq b_m \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in I_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

Nach D1.6.1, S1.6.1 lesen

Bsp:  $K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < 1/n\}$ ,

z.z  $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \{z_0\}$



Bew: " $K \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ "  $z_0 \in K$ , da  $z_0 \in K_n$ ,  $|z_0 - z_0| = 0 < 1/n \Rightarrow$

$z_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

„ $K \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ “ Annahme  $z_1 \in K$ ,  $z_1 \neq z_0 \Rightarrow |z_1 - z_0| = \delta > 0$ . Wähle  $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{n} > 1/\delta \Rightarrow$

$K_{\tilde{n}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \underbrace{|z - z_0|}_{= \delta \text{ für } z = z_1!} < 1/\tilde{n} < \delta\} \Rightarrow z_1 \notin K_{\tilde{n}} \Rightarrow z_1 \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$

**A1.5.35**

a)  $A \subset B$ ,  $\exists \min A$  und  $\min B \Rightarrow \min A \geq \min B$

Bew: Bspskizze:  $\text{---}[\text{---}(\text{---})\text{---}]$   $a = \min A$ :  $a \in A$  &  $A \subset B \Rightarrow a \in B \Rightarrow a \geq \min B$

b)  $A \subset B$ ,  $\exists \inf A$  &  $\inf B \Rightarrow \inf A \geq \inf B$

Bew:  $a := \inf A$ ,  $B := \inf B \Rightarrow b \leq x \quad \forall x \in B \quad b \leq x \quad \forall x \in B \Rightarrow b \leq x \quad \forall x \in A \Rightarrow$   
 $\hspace{15em} A \subset B$

$b$  untere Schranke von  $A \Rightarrow b \leq a$

c)  $\exists \max A$  und  $\max B \Rightarrow \exists \max (A \cup B)$  &  $\max \Rightarrow \max (A \cup B) = \max\{\max A, \max B\}$

Bew: Sei  $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \leq \max A \wedge x \leq \max B \Rightarrow$

$x \leq \max\{\max A, \max B\} \quad \forall x \in A \cup B$ , da  $\max\{\max A, \max B\} \in A \cup B$

ist  $\max\{\max A, \max B\} = \max(A \cup B)$

**A1.5.36** Max, Min, Sup, Inf?

a)  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]$

Lös:  $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow [0, \frac{1}{m}] \subset [0, \frac{1}{n}] \Rightarrow [0, \frac{1}{n}] \subset [0, \frac{1}{1}] = [0, 1] \quad \forall n \Rightarrow A = [0, 1]$

$0 \in A$  &  $\forall x \in A: x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \min A = 0$

$0 \leq x \quad \forall x \in A \Rightarrow \inf A = 0$

$1 \in A$  &  $\forall x \in A: x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \max A = 1$

$x \leq 1 \quad \forall x \in A \Rightarrow \sup A = 1$

b)  $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]$

Lös:  $0 \in [0, \frac{1}{n}] \Rightarrow 0 \in B \quad \forall n$

•  $x < 0: x \notin [0, \frac{1}{n}] \Rightarrow x \notin B$

••  $x > 0: \underset{\mathbb{N} \text{ unbeschränkt}}{\exists} \exists n \in \mathbb{N}: n > x^{-1} \Rightarrow x > \frac{1}{n} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: x \notin [0, \frac{1}{n}] \Rightarrow x \notin B$

• & ••  $\Rightarrow B = \{0\}$ , da  $x > 0$  oder  $x < 0$  oder  $x = 0$  in  $\mathbb{R} \Rightarrow$   
 $\min B = \inf B = \max B = \sup B$

c)  $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n})$

Lös:  $(0, \frac{1}{n}) \subseteq [0, \frac{1}{n}] \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow C \subset B = \{0\}$

$0 \notin (0, \frac{1}{n}) \Rightarrow 0 \notin C \Rightarrow C = \emptyset \Rightarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}: x$  ist obere Schranke von  $C$ ,  $x-1$  ist ebenfalls obere Schranke von  $C$

$\Rightarrow \exists \bar{s}: \bar{s}$  kleinste obere Schranke von  $C \Rightarrow$

kein  $\sup$ , analog kein  $\inf \Rightarrow$  kein  $\max$ , kein  $\min$

d)  $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

// **S1.5.18** (763) Intervallschachtelungsprozess

// Vor: Seien  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $a_n \leq b_n$  mit  $I_{n+1} \subset I_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$   
// Beh:  $\exists$  mindestens ein  $x \in \mathbb{R}$ :  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ , d.h.  $a_n \leq x \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
Lös:  $D$  ist Intervallschachtelung  $\stackrel{S1.5.18}{\Rightarrow} |D| = 1 \stackrel{B}{\Rightarrow} D = \{0\} \Rightarrow$   
 $\sup D = \inf D = \max D = \min D = 0$