1.5(700) Die natürlichen Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion

Natürliche Zahlen: 1,2:=1+1,, 3:=2+1 usw

D1.5.1(700)
1.)Eine Teilmenge $T\subset\mathbb{R}$ heißt induktiv:$\Leftrightarrow$
α) $1\in T$ und β) $t\in T \Rightarrow t+1\in T\ \forall\ t\in\mathbb{R}$
Bsp:$[1,\infty)$

Alle denkbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$: $(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$,
davon nur Menge I aller induktiven Teilmengen: $I\subset(\mathcal{P}(\mathbb{R})$
T_i: nur eine induktive Teilmenge $T_i\in I$
Alle induktiven Teilmengen von I: $I=\bigcup_{T\in I} T_i\subset(\mathcal{P}(\mathbb{R})$

2.) Sei I die Menge aller induktiven Teilmengen T_i von $\mathbb{R}$ $(I\subset(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$,
dann heißt $\mathbb{N}:=\bigcap_{T_i\in I} T_i$ die Menge der natürlichen Zahlen.

Bem: $\mathbb{R}\in I \Rightarrow I\neq\emptyset$ (siehe Körperaxiome)

Eigenschaften von $\mathbb{N}$:
1.) $\mathbb{N}$ ist induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$
Bew: $1\in T_i\ \forall\ T_i\in I=\bigcup_{T\in I} T_i\subset(\mathcal{P}(\mathbb{R})\Rightarrow 1\in\bigcap_{T_i\in I} T_i$

$x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\in\bigcap_{T_i\in I} T_i=\mathbb{N} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{D1.5.1 1.)}\beta} x+1\in T_i\ \forall\ T_i \Rightarrow x+1\in\bigcap_{T_i\in I} T_i=:\mathbb{N}$

2.)(.)$\mathbb{N}$ ist in jeder induktiven Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthalten $\Rightarrow$
(..)$\mathbb{N}$ ist kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$
Bew:(.)$1\in T_i\ \forall\ T_i\in I \Rightarrow 1\in\bigcap_{T_i\in I} T_i=:\mathbb{N}$.

Sei $x\in\mathbb{N} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{D1.5.1 2.)}} x\in T_i\ \forall\ T_i\in I$

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{D1.5.1 1.)}\beta} (x+1)\in T_i\ \forall\ T_i\in I \Rightarrow (x+1)\in\bigcap_{T_i\in I} T_i=:\mathbb{N}$.

//**D1.5.1**(700)
//(..) Sei $I\subset(\mathcal{P}(\mathbb{R})$ die Menge aller induktiven Teilmengen T_i von $\mathbb{R}$
// dann heißt $\mathbb{N}:=\bigcap_{T_i\in I} T_i$ die Menge der natürlichen Zahlen.

Bew:(..)$\mathbb{N}$ ist kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$
Nur für diesen Abschnitt:
T sei eine Menge,$|T|$:=Zahl der Elemente in T

Bsp: $\tilde{T}_i \subset \mathbb{N} \Rightarrow |\tilde{T}_i| = |\{1,2,\dots,p\}| < |\{1,2,\dots,p,\ p+1,\ \dots\}| = |\mathbb{N}|$
$_i$ ist hier kein Zählindex, sondern signalisiert induktive Menge

Annahme: $\exists\ \tilde{T}_i \in I = (\bigcup_{T_i \in I} T_i) \subset (P(\mathbb{R})) : |\tilde{T}_i| < |\mathbb{N}| \Rightarrow \tilde{T}_i \subset \mathbb{N}$

$$\mathbb{N} \underbrace{=}_{D1{,}5{,}1(..)} \bigcap_{T_i \in I} T_i = \left(\left(\bigcap_{T_i \in I/\{\tilde{T}_i\}} T_i\right) \cap \tilde{T}_i\right) \subset \tilde{T}_i \Rightarrow \tilde{T}_i \subset \mathbb{N} \wedge \mathbb{N} \subset \tilde{T}_i \Rightarrow \tilde{T}_i = \mathbb{N} \Rightarrow$$

Annahme: $\exists\ \tilde{T}_i \subset \mathbb{N}$ falsch

kann $\tilde{T}_i \subset \mathbb{N}$ nach D1.1.1 (.)überhaupt induktiv sein?

Bem:1.) $0 \notin \mathbb{N}$, da mit T_i auch $0 \notin T_i \cap \underbrace{[1,\infty)}_{\text{injektiv nach } D1.5.1\ Bsp}$ eine induktive Menge ist,
($[1,\infty) := \{x \in \mathbb{R} | 1 \le x\}$) und $\mathbb{N} \subset T_i \cap [1,\infty)$, $0 \notin [1,\infty)$ gilt) und damit
$0 \notin \bigcap_{T \in I} T_i =: \mathbb{N}$

Bez: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist induktiv und heißt die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen

Sei $A \subset \mathbb{N}$ so, daß $1 \in A$ und der Schluss $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$ richtig sind (mit anderen Worten :A ist induktiv). Dann folgt bereits $A = \mathbb{N}$

Beh:a) $x < 1 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$
Bew: $M = [1,\infty)$ ist offenbar induktiv und deshalb $\mathbb{N} \subset M$
b) $n \in \mathbb{N}$, $n < x < n+1 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}$
Bew: $M_n = \{1,2,...,n\} \cup [n+1,\infty)$ ist induktiv und somit gilt $\mathbb{N} \subset M_n$
#Bew: $x \notin M_n = \{1,2,...,n\} \cup [n+1,\infty)$ ist induktiv und somit gilt $\mathbb{N} \subset M_n$

A1.5.1 Sei im folgenden $a \in \mathbb{R}$ festgehalten. Wir wollen ein $M \subset \mathbb{R}$ a-induktiv nennen, wenn $a \in M$ und $x \in M \Rightarrow x+1 \in M$ immer gelten.
Zeige:Es gibt genau eine kleinste a-induktive Menge N_a. Für welches a ist $N_a = \mathbb{N}$?

A1.5.2 Zeige für N_a wie oben 2 Aussagen, welche obiger Beh entsprechen

A1.5.3 Finde für jedes N_a wie oben eine bijektive Abb von N_a auf $\mathbb{N}$

S1.5.1(702) Prinzip der vollständigen Induktion
Vor: $\forall\ n \in \mathbb{N}$ sei $A_{(n)}$ eine von n abhängige Aussage gegeben und es gelte
1.) "$A_{(1)}$ ist wahr" (Induktionsanfang: IAnf) und
2.) Wenn $\forall\ n \in \mathbb{N}$ (beliebige $n \in \mathbb{N}$) gilt „$\underbrace{A_{(n)} \text{ ist wahr}}_{IndHyp:\ IHyp}$", folgt, dass auch „$\underbrace{A_{(n+1)} \text{ ist wahr}}_{IndAussage:\ IAuss}$" ist, so gilt: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Bezeichnungen: $\forall\ n \in \mathbb{N}$ gilt $\underbrace{(\underbrace{A_{(n)}}_{IH} \Rightarrow \underbrace{A_{(n+1)}}_{\text{Induktionsbehauptung}})}_{\text{Induktionsschluss } (IS)\, n \Rightarrow n+1}$ ist wahr

Bew:Sei $T := \{n \in \mathbb{N} | A_{(n)} \text{ ist wahr}\} \Rightarrow T \subset \mathbb{N}$

$1 \in T$ da $A_{(1)}$ wahr

Sei $n \in T \Rightarrow A_{(n)}$ wahr. $(A_{(n)} \Rightarrow A_{(n+1)})$ wahr $\Rightarrow A_{(n+1)}$ wahr$\Rightarrow$

$\underbrace{n+1 \in T}_{*} \Rightarrow \underbrace{\text{T induktiv}}_{\text{* wahr}} \Rightarrow T=\mathbb{N}$

Andere Formulierung Bew:

$T=\{n \in \mathbb{N} : A_{(n)} \text{ ist wahr}\} \subset \mathbb{N}$.

T ist induktive Menge $\Rightarrow T \supset \mathbb{N}$ (kleinste induktive Menge) $\Rightarrow T=\mathbb{N}$

Bsp:$A_{(n)}$: $\underbrace{-2^n > n}_{falsch}$ wahr $\Rightarrow A_{(n+1)}$: $\underbrace{-2^{n+1} > n+1}_{falsch}$ wahr $\Rightarrow$ $\underbrace{\underbrace{-2^n}_{>n\text{ falsch}} \cdot 2}_{>2n\text{ falsch}} > 2n \geq n+1 \Rightarrow$

$\underbrace{-2^{n+1} > n+1}_{falsch}$ wahr d.h. $A_{(n+1)}$ wahr

Die Angabe falsch kann auch eine richtige Aussage sein.

Andere Formulierung:

Geg sei Aussage A(n), welche für $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ sinnvoll ist. Wir sagen, dass wir A(n) durch vollständige Induktion beweisen, wenn wir nach folgendem Schema vorgehen:

a) Wir zeigen die Richtigkeit von A(1) (Induktionsanfang)

b) Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben. Unter der Induktionshypothese, d.i. die Annahme der Richtigkeit von A(n), oder auch die Annahme der Richtigkeit von A(m) $\forall$ $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$, zeigen wir die Richtigkeit von A(n+1)(Schluss von n auf n+1, oder Induktionsschritt).
Ist dies gelungen, so ist die Menge der $n \in \mathbb{N}$, für die A(n) richtig ist, eine induktive Menge und aus dem Induktionsprinzip folgt, dass A(n) für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.
Beachte aber, dass ein Beweis durch vollständige Induktion nur dann möglich ist, wenn die zu zeigende Aussage schon bekannt ist.

Beachte noch, dass beim Beweisen durch vollständige Induktion der Induktionsanfang nicht unbedingt 1 sein muss, sondern im Allgemeinen sogar eine beliebige reelle Zahl sein kann, dies ergibt sich durch Betrachten der a-induktiven Mengen (A1.5.1-A1.5.3)

Das Induktionsprinzip kann auch zur Definition von Größen $\alpha(n), n \in \mathbb{N}$, benutzt werden, indem man

(.) $\alpha(1)$ durch eine Vorschrift definiert

(..)Wenn man $\alpha(1)...\alpha(n)$ definiert hat, eine Vorschrift F angibt, mit der man $\alpha(n+1)=F(\alpha(1)...\alpha(n))$????
Durch ein solches Vorgehen ist $\alpha(n)$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ eindeutig definiert

A1.5.4 Zeige: $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$

Lös:Für n=1 ist die Aussage sicher richtig.
Wenn sie für irgend ein n gilt, folgt
$1+3+..(2n+1)+(2(n+1)+1)=1+3+..(2n+1)+(2n+3)=$
$(n+1)^2+2(n+1)+1^2=(n+1+1)^2$.
Also gilt die Beh auch für n+1 anstelle von n

S1.5.2(703)

Rechenregeln in $\mathbb{N}$: $\forall$ $m,n \in \mathbb{N}$ gilt

1.)$n \geq 1$ (also $1=\min \mathbb{N}$)

*//**S1.5.1** (701)Prinzip der vollständigen Induktion....//*

Bew:$A_{(n)}$:$(n \geq 1)$

Ianf n=1: $A_{(1)}$: $1\geq 1$

n→n+1 : ($A_{(n)} \Rightarrow A_{(n+1)}$) $\underbrace{n}_{>=1\ \text{IHyp}} +1\geq 1+1>1+0=1 \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.1} A_{(n)}$ wahr ∀ n∈ **N**

//**D1.5.1**(700)

//1.)Eine Teilmenge T⊂**R** heißt induktiv:⇔

//0 α) 1∈T und   β) t∈T ⇒ t+1∈T ∀ t∈**R**

//Eigenschaften von **N**:

//2.)(.)**N** ist in jeder induktiven Teilmenge von **R** enthalten ⇒

// (..)**N** ist kleinste induktive Teilmenge von **R**

2.)n≠1 ⇒ ∃ k∈**N**: $\underbrace{n}_{\neq 1!!!}$ =k+1 ⇒ n-1=k∈**N**

Bew:??? nicht verstanden

$T=\{1\}\cup\{n+1|n\in N\}$ (Bsp n=6∈**N** ⇒ $T=\{1\}\cup\{6+1|6\in N\}=\{1,7\}\subset N$)

⇒ T⊂**N** ⇒ $\underbrace{n+1}_{N\ induktiv}$ ∈T ∀ n∈**N**

Beh:1∈T und sei $\underbrace{k}_{\in N}$ ∈T $\underbrace{\Rightarrow}_{Def\ T}$ k+1∈T $\underbrace{\Rightarrow}_{D1.5.1\ 1.)}$ T induktiv $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Eigenschaften von N 2.) (..)}}$

N⊂T ⇒ ∀ $\underbrace{k}_{\neq 1}$ ∈**N** ist k∈T ⇒ ∃ n∈**N** : k=n+1 ⇒ n=k-1∈**N**

Eigener Versuch in Anlehnung an 3.)...

$A_{(n)}$: ∃ k∈**N**: $\underbrace{n}_{\neq 1!!!}$ =k+1 ⇒ n-1=k∈**N**

$A_{(1)}$: ∃ 1∈**N**: $\underbrace{n}_{\neq 1!!!}$ =1+1 ⇒ n-1=1+1-1=1∈**N**

IS n→n+1: ∃ k+1∈**N**: $\underbrace{n}_{\neq 1!!!}$ =k+1+1 ⇒ n-1=k+1+1-1=k+1∈**N**

3.)m+n∈**N**, d.h. **N** ist abgeschlossen bzgl Addition

Bew: $A_{(n)}$: n+m∈**N** ∀ m∈**N** beliebig aber fest

IAnf $A_{(1)}$:1+m=m+1∈**N** ∀ m∈**N** da **N** ind. Syst.

$A_{(1)}$ wahr, da **N** induktiv ∀ n

IS n→n+1: n+m∈**N** ∀ m∈**N** $\underbrace{\Rightarrow}_{N\ induktiv} \underbrace{(m+n)}_{IHyp:\in N}$ +1∈**N** ∀ m∈ **N** ⇒

(m+n)+1=(n+1)+m∈**N** ∀ m∈**N**.

4.)m*n∈**N** ⇒ **N** ist abgeschlossen bzgl Multiplikation

Bew:$A_{(n)}$: n*m∈**N** ∀ m∈**N** beliebig aber fest

n=1 $A_{(1)}$:1*m=m∈**N** ∀ m∈**N**

n→n+1 $A_{(n+1)}$:m(n+1)∈**N**=($\underbrace{mn}_{IHyp\ \in N}$ +m) $\underbrace{\in N}_{3.)}$ ∀ m∈**N**

5.)m-n∈**N** wenn n<m

*//**S1.5.2** (702) Rechenregeln in N: ∀m,n∈N gilt//*

//1.)n≥1 (also 1=min N)//

//2.)n≠1 ⇒ ∃ k∈N: n=k+1, d.h.n-1∈N//

Bew:$A_{(n)}$:m-n∈**N** ∀ $\underset{m>n}{m}$ ∈**N**

$A_{(1)}$ n=1: m-1∈**N**, ∀ m>1 ...siehe 2.) #n≥1 $\underbrace{\Rightarrow}_{m>n}$ m>1

$A_{(n)}$:m-n∈**N** ∀ m>n.

$A_{(n+1)}$:Wähle m∈**N** m>n+1 $\underbrace{\Rightarrow}_{1.)}$ m>1 $\underbrace{\Rightarrow}_{2.)}$ m-1>n ⇒

$\underbrace{m}_{>n+1}$ -(n+1)=($\underbrace{(m-1)}_{>n}$ -n)∈**N**

andere Formulierung:

$A_{(1)}$ n=1 :m>1 ⇒ m-1≥1 und m-1∈N nach 2.)
$A_{(n)}$ n :m-n∈N wenn m>n ∀ m,n∈N
$A_{(n+1)}$ n→n+1:m>n+1, m-(n+1)= $\underbrace{m-n}_{\in N\ IndHyp}$ -1 $\underbrace{\in N_0}_{2.)}$ aber m-n-1≠0 weil

m>n+1, deshalb ∈N

6.)m>n ⇒ m≥n+1 ⇒ Es gibt keine natürliche Zahl zwischen n und n+1
(n≠m ⇒ |n-m|≥1)
Bew:3.)m+n∈N, 5.)m-n∈N $\underbrace{\Rightarrow}_{1.)}$ m-n≥1 ⇒ m≥n+1

m≠n ⇒ m>n oder m<n
1.Fall m>n ⇒ m≥n+1 ⇒ m-n≥1
2.Fall m<n ⇒ $\underbrace{n-m}_{5.):\in N}$ ≥1 ⇒ |n-m|=max{m-n,n-m}≥1

andere Formulierung:
Nach (O1) gilt n>m oder n<m. |n-m|=n-m $\underbrace{\in}_{5.)}$ N $\underbrace{\Rightarrow}_{1.)}$ n-m≥1 also |n-m|>1

Bez:n+1 heißt Nachfolger von n∈N (n der Vorgänger von n+1).
Schreibweise: N={1,2,3....}, N_0={0,1,2,3...}, wobei 3=2+1,4=3+1 usw

S1.5.3(705) Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung

Vor: Aus „$A_{(m)}$ ist wahr" ∀ m∈N mit 1≤m≤n folgt stets „$A_{(n+1)}$ ist wahr",
Beh: $A_{(n)}$ ist wahr ∀ n∈N

Bew: $B_{(n)}:=A_{(1)} \wedge A_{(2)}..\wedge A_{(n)}$.
$B_{(1)}=A_{(1)}$ wahr, $B_{(2)}:=A_{(1)} \wedge A_{(2)}$ wahr…..
$B_{(n)}$:=A(1) ∧ A(2)..∧ A(n) $\underbrace{\Rightarrow}_{Vor}$ $A_{(n+1)}$ wahr ⇒
$B_{(n)}$ ⇒ $B_{(n+1)}$ wahr.
$\underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.1}$ $B_{(n)}$ wahr ∀ n∈N ⇒ $A_{(n)}$ wahr ∀ n∈N

Bsp: $2^n>n^2$ ∀ n≥5
Induktionsanfang n=5: $2^5=32>5^2=25$
Induktionshypothese n: $2^n>n^2$
Induktionsschritt n+1: $2^{n+1}=2^n*2 \underset{IH}{>} n^2*2=n^2+n^2=n^2+(n-1)n+n>n^2+2n+1=(n+1)^2$

A1.5.5 Beweise durch vollständige Induktion:
a) $n^2\le 2^n$ ∀ n∈N, n≠3.
Bew: n=1: $1^2\le 2^n=2$ ok
n=2: $2^2\le 2^2$ ok
n=3: $3^2\le 2^3$ falsch
IA n=4: $4^2\le 2^4$ ok
IH $n^2\le 2^n$
IS $(n+1)^2=n^2+2n+1 \underbrace{\le}_{IH,n\ge 4} 2^n+\frac{n^2}{2}+1\le 2^n+2^{n-1}+1\le 2^n+2^{n-1}+2^{n-1}=2^n+2^n=2^{n+1}$

a) ∀ n∈N gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^3=1+2^3+3^3+4^3+....n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(Bedeutung $\sum_{k=1}^{n+1}$ siehe D1.5.2 (712))

Bew:IAnf n=1 : $1^3=\frac{1^2*2^2}{4}=1$

IHyp für ein n∈**N**: $\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

IS n→n+1 : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3=\sum_{k=1}^{n} k^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^2(n+1)=$

$$\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

b) Sei M eine endliche Menge, |M| bezeichne die Anzahl ihrer Elemente und **P**(M) ihre Potenzmenge. ∀ endlichen Mengen gilt: $|\mathbf{P}(M)|=2^{|M|}$.
Anl: Für m∈M ist **P**(M)=A∪(**P**(M)\A) mit A={X∈**P**(M):m∈X}

Bsp: $\tilde{M}$=M\{m}={1,2}; P($\tilde{M}$)={{},{1},{2},{1,2}}; n=|$\tilde{M}$|; |P($\tilde{M}$)|=$2^n=2^2=4$
M={1,2,3}; m=3; |M|=3;
P(M)={{},{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}};
|P(M)|=8=$2^{|M|}=2^3$;
A={{3},{1,3},{2,3}{1,2,3}};
P(M)=A∪(**P**(M)\A)={{3},{1,3},{2,3}{1,2,3}∪{{},{1},{2},{1,2}}=
={X∈**P**(M):m∈X} ∪ {X∈**P**(M):m∉X}
={X∈**P**(M):m∈X} ∪ { $\underbrace{Y}_{X\ ohne\ \{m\}}$ ∈**P**($\tilde{M}$)}
={Y∪{m}:Y∈**P**($\tilde{M}$)} ∪{Y∈**P**($\tilde{M}$)}=
{{}∪{3},{1}∪{3},{2}∪{3},{1,2}∪{3}}∪{{},{1},{2},{1,2}}=
{{3},{1,3},{2,3},{1,2,3}} ∪{{},{1},{2},{1,2}}
|P(M)|=|{3},{1,3},{2,3},{1,2,3}}|+|{{},{1},{2},{1,2}}|

Bew:IAnf n=1 :|M|=1 ⇒ M={m} ⇒**P**(M)={∅,{m}} ⇒ |**P**(M)|=2=2^1.
Ihyp :|**P**(M)|=$2^{|M|}$ für ein n=|**P**(M)|∈**N**
IS n→n+1:Sei m∈M. $\tilde{M}$=M\{m} ⇒ |$\tilde{M}$|=n, da |M|=n+1.
X={ $\underbrace{X\ ohne\ \{m\}}_{Y}$ ∪{m}}
P(M)=A∪(**P**(M)\A)={X∈**P**(M):m∈X}∪{X∈**P**(M):m Ï X}=
{X∈**P**(M):m∈X}∪{Y∈**P**($\tilde{M}$)}={Y∪{m}:Y∈**P**($\tilde{M}$)}∪{Y∈**P**($\tilde{M}$)}
|**P**(M)|=||Y∪{m}:Y∈**P**($\tilde{M}$)}|+|**P**($\tilde{M}$|=$2^n+2^n=2^{n+1}$.

c) Fibonaccizahlen: Es seien $F_0=0$ und $F_1=1$ gegeben. F_n wird rekursiv definiert durch $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$. Dann gilt ∀ 2≤n∈**N**:

$$F_n=\frac{[1/2(1+\sqrt{5})]^n-[1/2(1-\sqrt{5})]^n}{1/2(1+\sqrt{5})-1/2(1-\sqrt{5})}=\frac{\lambda^n-\mu^n}{\lambda-\mu}\ ,\ \lambda=½(1+\sqrt{5})\ \ \mu=½(1-\sqrt{5})$$

Bew:IAnfang n=2: $F_2=F_1+F_0=1+0=1$

$F_2=\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda-\mu}=\lambda+\mu=1/2(1+\sqrt{5})+½(1-\sqrt{5})=1$

705

IHyp :Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $F_k = \dfrac{\lambda^k - \mu^k}{\lambda - \mu} \quad \forall\ 2 \le k \le n$

IS $n \to n+1$: z.z. $F_{n+1} = \dfrac{\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}}{\lambda - \mu} = F_n + F_{n-1} \underbrace{=}_{\text{IHyp} f.\, n \text{ und } n-1} \dfrac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} + \dfrac{\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}}{\lambda - \mu} =$

$\dfrac{(\lambda^n + \lambda^{n-1}) - (\mu^n + \mu^{n-1})}{\lambda - \mu} = \dfrac{\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}}{\lambda - \mu}$ siehe NR

NR: $\lambda^n + \lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda+1) = \lambda^{n-1}\lambda^2 = \lambda^{n+1}$.

Beh: $(\lambda+1) = \lambda^2$, wie folgt

$(\lambda+1) = ½ + \sqrt{5}/2 + 1 = 3/2 + \sqrt{5}/2$, $\lambda^2 = [1/2(1+\sqrt{5})]^2 = ¼(1+2\sqrt{5}+5) = 3/2 + \sqrt{5}/2$

analog $\mu^n + \mu^{n-1} = \mu^{n+1}$.

d) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

Lös: n=0: $\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1$, $2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1$ ....ok

Indh: $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ für $n \ge 0$

$n \to n+1$: $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} \underbrace{=}_{IH} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 * 2^{n+1} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$

e) $\prod_{k=2}^{n} (1-k) = (-1)$

S1.5.4(707) Archimedisches Prinzip

$\forall\ a \in \mathbb{R}\ \exists\ n \in \mathbb{N}: a < n$ (d.h. $\mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ nach oben nicht beschränkt)

*//**D1.3.2** (504) $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ heißt vollständig (bezüglich $<$): $\Leftrightarrow$*

// $\forall\ T \subset \mathbb{K}$, $T \ne \emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists\ \sup T \in \mathbb{K}$.

// Ein angeordneter, vollständiger(bzgl Anordnung) Körper heißt

// Körper der rellen Zahlen $\mathbb{R}$

*//**S1.3.1** (501)Vor.:$\mathbb{K}$ angeordnet $T \subset \mathbb{K}$, $T \ne \emptyset$, $s \in \mathbb{K}$//*

// 1.) $\bar{s} = \sup T$: $\Leftrightarrow$ α) $\bar{s}$ ist obere Schranke von T und//

// β) $\forall\ \varepsilon > 0$ ist $\bar{s} - \varepsilon$ keine obere Schranke von T //

// $\Leftrightarrow$ $\forall\ t \in T$: $t \le \bar{s}$ und $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ t_\varepsilon \in T$ mit $t_\varepsilon > \bar{s} - \varepsilon$ //

Bew:(falsche)Ann. $\exists\ a \in \mathbb{R}$: $n \le a\ \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \mathbb{R}$ ist obere Schranke für $\mathbb{N}$.

D1.3.2: $\exists \sup \mathbb{N} = \bar{s} \in \mathbb{R}$.

S1.3.1 β) ε kann auch 1 sein: $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}$: $\underbrace{n}_{>\bar{s}} > \bar{s} - \underbrace{1}_{\varepsilon} < \Rightarrow \bar{s} < n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow$

Widerspruch zur Def von $\bar{s}$

Bem:1.) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$ (Prinzip des Eudoxos) $\Leftrightarrow$ Archimedisches Prinzip

2.) Für $a \in \mathbb{R}$ gilt $a = 0 \Leftrightarrow |a| < 1/n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

(vgl S1.2.1 (408))

$a = 0 \Leftrightarrow |a| < \varepsilon\ \forall\ \varepsilon \in K$ mit $\varepsilon > 0$

3.) $\forall\ a, b > 0\ \exists\ n \in \mathbb{N}$: $na > b$

Bew:Aus $na \le b$ folgt $n \le b/a$, was nicht $\forall\ n \in \mathbb{N}$ gelten kann.

S1.5.5(708) Wohlordnungssatz

Vor: $M\subset\mathbb{N}$ und $M\neq\emptyset$ Beh: $\exists$ minM

*//**D0.1.5** (5) $M_1\subset M_2$, $M_1^C := M_2\setminus M_1$ Komplement M_1 in M_2, $M\subset\mathbb{N}$, $M^C=\mathbb{N}\setminus M$ //*

*//**S1.5.2** (702) Rechenregeln in N: $\forall m,n\in N$ gilt//*

//1.) $n\geq 1$ (also $1=\min\mathbb{N}$)

//6.) $m>n \Rightarrow m\geq n+1 \Rightarrow \nexists$ natürliche Zahl zwischen n und n+1//

// $(n\neq m \Rightarrow |n-m|\geq 1)$//

Bew: Annahme $\nexists$ min M (Untersuchung ob für $M\subset\mathbb{N}$ Vor $M\neq\emptyset$ erfüllt?
Falls $M=\emptyset$, ist Annahme falsch
d.h. es existiert doch Min).

Sei $M^c:=\{n\in\mathbb{N} \mid n<m \ \forall m\in M\} \Rightarrow M^c\subset\mathbb{N}$.

Ist M^c induktiv? (dann bleibt für M „nichts übrig")

1.) $1 \underbrace{\leq}_{S1.5.2\ 1.)} n \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow 1\leq m \ \forall m\in M\subset\mathbb{N} \Rightarrow$

- $\exists \ m=1\in M \Rightarrow 1 \underbrace{=}_{S1.5.2\ 1.)} \min M \Rightarrow$ Widerspruch zu $\exists$ kein min M $\Rightarrow$
- $\exists \ 1<m \ \forall m\in M \Rightarrow 1\in M^c$,

$\Rightarrow M^c=\{1\}\cup\{n\in\mathbb{N} \mid 1<n<m \ \forall m\in M\} \Rightarrow M^c\subset\mathbb{N}$

2.) Sei $n\in M^c \Rightarrow n<m \ \forall m\in M \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.2\ 6.)} n+1\leq m \ \forall m\in M$,

- $\underbrace{m}_{\in M}=n+1 \Rightarrow n+1=\min M \Rightarrow$ Widerspruch zu $\nexists$ min M
- $n+1<\underbrace{m}_{\in M} \ \forall m\in M \underbrace{\Rightarrow}_{Def\ T} n+1\in M^c$.

1.) und 2.) $\Rightarrow$ M^c ist induktiv

$\mathbb{N}$ kleinste induktive Menge $\mathbb{N}\subset M^c \wedge M^c\subset\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}=M^c \Rightarrow M=M\cap\mathbb{N}=M\cap M^c \underbrace{=}_{Definition\ M^C} \emptyset$

$\Rightarrow M=\emptyset$ Widerspruch zu $M\neq\emptyset$ $\Rightarrow \nexists$ min M ist falsch $\Rightarrow \exists$ min M richtig

A1.5.6

a) Durch das Rekursionsschema

$a_0:=-2$, $a_1:=1$, $a_{n+1}:=1/2(a_n+a_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}$, wird genau eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ festgelegt. Man gebe eine explizite Darstellung für diese Folge.

Anleitung: Man berechne a_n für n=2,3,4,5 und beweise sodann die sich ergebende Vermutung.

*//**S1.5.3** (703) Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung*
// Vor: Aus „$A_{(m)}$ ist wahr" $\forall$ $m\in N$ mit $1\le m\le n$ folgt stets „$A_{(n+1)}$ ist wahr"//
// Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall$ $n\in N$//

Lös: $a_2=1/2(1+(-2)=-1/2$ $a_3=1/4$ $a_4=-1/8$ $a_5=1/16$.. Vermutung:

Beh: $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=(-1/2)^{n-1}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$.

Bew mit Indsatz 2. Fassung A(n): $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$.

Bew: $\underbrace{IAnf}_{S1.5.3}$ $A_{(0)}$: $n=0: a_0=(-1/2)^{0-1}=-2 \Rightarrow A_{(0)}$ wahr

IS : Zu zeigen $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$ gilt ($A_{(m)}$ $\forall$ $m\in\mathbb{N}_0$ mit $0\le m\le n \Rightarrow A_{(n+1)}$).

Sei $n\in\mathbb{N}_0$ fest aber bliebig

(Z.z. ist: $\underbrace{A_{(m)}, 0\le m\le n}_{\text{Ind}\,Hyp} \Rightarrow \underbrace{A_{(n+1)}}_{\text{Ind}\,Beh}$)

1.Fall: $a_{n+1}=a_{0+1}=a_1=1=(-1/2)^0$

$a_{n+1}=a_{1+1}=a_2=1/2(a_1+a_0)=1/2(1+-2)=-1/2=(-1/2)^{(1+1)-1}=(-1/2)$

d.h. $A_{(0)} \Rightarrow A_{(0+1)}=A_{(1)} \wedge A_{(1)} \Rightarrow A_{(1+1)}=A_{(2)}$

2.Fall: $n\ge 1$ IndHyp: $a_m=(-1/2)^{m-1}$ für alle m: $0\le m\le n$,

IndBeh : $a_{n+1}=(-1/2)^{(n+1)-1}=(-1/2)^n$

$a_{n+1}=1/2(a_n+a_{n-1}) \underbrace{=}_{IndHyp} 1/2((-1/2)^{n-1}+(-1/2)^{(n-1)-1})=$

$½((-1/2)^{n-1}\underbrace{(1+(-1/2)^{-1})}_{=1+(-2)}=$

$(-1)(1/2)(-1/2)^{n-1}=(-1/2)(-1/2)^{n-1}=(-1/2)^n$

*//**S1.5.3** (703) Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung//*
//Vor: Aus „$A_{(m)}$ ist wahr" $\forall$ $m\in\mathbb{N}$ mit $1\le m\le n$ folgt stets „$A_{(n+1)}$ ist wahr"//
// so gilt: Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall$ $n\in\mathbb{N}$//

Es wurde also für beliebiges aber festes $n\in\mathbb{N}_0$ gezeigt
$A_{(m)}$, $\forall$ $m\in\mathbb{N}_0$ mit $0\le m\le n \Rightarrow A_{(n+1)}$,
also nach Teil 2) in S1.5.3 $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$ gilt
($A_{(m)}$, $m\in\mathbb{N}_0$, $0\le m\le n \Rightarrow A_{(n+1)}$).
Die Vor nach S1.5.3 ist also erfüllt mit IndAnf n=0.
Damit: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$ (Teil 1 und 2))

b) Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei folgendermaßen rekursiv definiert:

$a_0:=3$, $a_{n+1}:=1/2(a_n+5/a_n)$, $n\geq 0$.

- Zeige: $\sqrt{5}<a_{n+1}<a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$.

●● Ist $\sqrt{5}$ das Infimum der Wertemenge der Folge (a_n)?

Bem: Diese Def ist sinnvoll, da $a_n>0$ d.h. auch $a_n\neq 0\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$.

Bew durch Induktion

$n=0: a_0=3>0$, $n\to n+1: a_{n+1}=1/2(\underbrace{a_n}_{>0}+\underbrace{5/a_n}_{>0})>0$

*//**A1.2.10**c) 408) a,b∈K angeordnet. c) $a^2<b^2$ gilt genau dann, wenn $|a|<|b|$//*

*//**S1.3.1** (501) Vor.: K angeordnet T⊂K, T≠∅, s∈K//*

// 1.) $\underline{s}$ = inf T:⇔ α) $\underline{s}$ ist untere Schranke von T und //

// β) ∀ ε>0 ist $\underline{s}$+ε keine untere Schranke von T //

// ⇔ ∀ t∈T: t≥$\underline{s}$ und ∀ ε>0 ∃ t_ε∈T mit $t_\varepsilon<\underline{s}+\varepsilon$//

Lös: ● Zuerst ● $\sqrt{5}<a_n$, dann ●● $a_{n+1}<a_n$

● $5<a_n^2$ (damit $\sqrt{5}<a_n$, denn $(\sqrt{5})^2=5<a_n^2 \underbrace{\Rightarrow}_{A1.2.10} \underbrace{|\sqrt{5}|}_{=\sqrt{5},\sqrt{\ }\text{stets}\geq 0}<|a_n|=a_n>0$)

Bew: Durch Induktion nach n.

Ianf : $n=0: 5<a_0^2=3^2=9$ und

$a_1=1/2(a_0+5/a_0)=1/2(3+5/3)=7/3 < 9/3=3=a_0$

IS $n \underbrace{\to}_{n\geq 0} n+1$: $a_{n+1}^2-5=[1/2(a_n+5/a_n)]^2-5=1/4(a_n^2+10+(5/a_n)^2-20)=$

$1/4(a_n^2-10+(5/a_n)^2)=[1/2(a_n-5/a_n)]^2=\left(\frac{a_n^2-5}{2a_n}\right)^2>0 \Rightarrow a_{n+1}^2>5$,

(da nach IHyp $a_n^2-5\neq 0$ wegen $a_n^2>5$)

●● $a_{n+1}<a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$

Bew: $a_n-a_{n+1}=a_n-1/2(a_n+5/a_n)=a_n-1/2a_n-5/2a_n=1/2a_n-5/2a_n=\frac{a_n^2-5}{2a_n}>0$

(nach IHyp da $a_n^2-5\neq 0$ wegen IHyp $a_n^2>5$) also $a_n>a_{n+1}\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$

●● Nach obigem ist die Menge $\{a_n: n\in\mathbb{N}_0\}$ nach unten durch

$\sqrt{5}$ beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Vollständigkeitsax.}}$ $\exists\ \alpha:=\inf\{a_n, n\in\mathbb{N}_0\}$ existent in $\mathbb{R}$ und $\alpha\geq\sqrt{5}$

Beh: $\alpha=\sqrt{5}=\inf\{a_n, n\in\mathbb{N}_0\}$.

*//**A1.2.10**c) 408) a,b∈K angeordnet. c) $a^2<b^2$ gilt genau dann, wenn $|a|<|b|$//*

Bew: Annahme: $\alpha\neq\sqrt{5}$, d.h. $\alpha>\sqrt{5}$? $\underbrace{\Rightarrow}_{A1.2.10c}$ $\alpha^2>5 \Rightarrow a_n-a_{n+1}=\frac{a_n^2-5}{2a_n}\underbrace{\geq}_{a_n\geq\alpha\forall n}$

$\underbrace{\frac{\alpha^2-5}{2\cdot 3}}_{a_n\leq a_0=3\forall n}=:\varepsilon\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$, wobei $\varepsilon>0$ (da $\alpha^2>5$).

$a_{n_0}-a_{n_0+1}\geq\varepsilon \Rightarrow -a_{n_0+1}\geq\varepsilon-a_{n_0} \Rightarrow a_{n_0+1}\leq a_{n_0}-\varepsilon$

// **S1.3.1** (501) Vor.: Sei K angeordnet und T⊂K, T≠∅, s∈K

//Beh: 1.) $\underline{s}$ = inf T:⇔ α) $\underline{s}$ ist untere Schranke von T und

// β) ∀ ε>0 ist $\underline{s}$+ε keine untere Schranke von T

// ⇔ ∀ t∈T: t≥$\underline{s}$ und ∀ ε>0 ∃ t_ε∈T mit $t_\varepsilon<\underline{s}+\varepsilon$

Zu diesem ε>0 $\underbrace{\exists t_\varepsilon}_{S1.3.1\ 1.)}\in\{a_n: n\in\mathbb{N}_0\}$ mit $t_\varepsilon<\alpha+\varepsilon$ da α Infimum,

d.h. $\exists\ n_0\in\mathbb{N}_0: a_{n_0}<\alpha+\varepsilon$, d.h. $a_{n_0}-\varepsilon<\alpha \Rightarrow a_{n_0+1}\leq a_{n_0}-\varepsilon<\alpha \Rightarrow$ ● $\sqrt{5}<a_n$,

$\sqrt{5}\underbrace{<}_{*} a_{n_0+1}<\alpha$..Widerspruch zu $\alpha>\sqrt{5}$ untere Schranke von $\{a_n, n\in\mathbb{N}_0\}\Rightarrow$

$\alpha=\sqrt{5}$

∗ ● $\sqrt{5}<a_n$,

D1.5.2 (711)
In einem Körper K seien Elemente $a, a_1, a_2, \ldots a_n \in K$ für ein $n \in \mathbb{N}$ eindeutig gegeben. Dann definieren wir

(.) Die Summe $\sum_{v=1}^{n} a_v$ durch $\begin{cases} \sum_{v=1}^{0} a_v := 0 \\ \sum_{v=1}^{1} a_v := a_1 \\ \sum_{v=1}^{m+1} a_v := a_{m+1} + \sum_{v=1}^{m} a_v,\ 1 \le m \le n-1 \end{cases}$

Bem: Die Assoziativgesetze besagen: Klammern sind nicht nötig

Andere Formulierung:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} 0,\ falls\ n<m \\ a_m,\ falls\ n=m \\ \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n,\ falls\ \ m+1 \le n \end{cases}$$

(..) Das Produkt $\prod_{j=1}^{n} a_j$ durch $\begin{cases} \prod_{j=1}^{0} a_j := 1 \\ \prod_{j=1}^{m+1} a_j := \left(\prod_{j=1}^{m} a_j\right) \cdot a_{m+1},\ 0 \le m \le n-1 \end{cases}$

Andere Formulierung:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} 1,\ falls\ n<m \\ a_m,\ falls\ n=m \\ \prod_{k=m}^{n-1} a_k * a_n,\ falls\ m+1 \ge n \end{cases}$$

(Motivation $\log(a_m * a_{m+1} * \ldots * a_n) = \sum_{k=m}^{n} \log a_k$)

(...) Die Potenzen a^n durch $a^n = a * a^{n-1}$.

Für die Potenzen gelten die üblichen Rechenregeln.
Bew durch Induktion
n-faches von a : $n*a$, $\underbrace{1}_{\in R} *a := a$, $(m+1)a := a + ma$, $1 \le m \le n-1$, $\underbrace{0}_{\in R} *a = 0 \in K$
nte Potenz von a: a^n, $a^1 := a$, $a^{m+1} = a * a^m$, $1 \le m \le n-1$,
neutrales Element $a \in K \to a^0 = 1 \in K$ (auch für $a = 0 \in K$)

//**D1.1.7**(306) Vor: $K \ne \emptyset$ und 2 Verknüpfungen
// $\oplus: K \times K \to K$ und $\otimes: K \times K \to K$
// $(K, \oplus, \otimes)$: ist ein Körper
// $\Leftrightarrow$
// (K4⊕) $a \oplus b = b \oplus a \in K\ \forall\ a, b \in K$
// *(K1⊗) Assoziativgesetz für ⊗:* $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c\ \ \forall\ a, b, c \in K$

Bem: 1.) obige Summen und Produkte sind $\forall\ n \in \mathbb{N}$ eindeutig (rekursiv) definiert
2.) Aus (K4⊕), (K⊗1) folgt mit Induktion, dass n-fache Summen und

Produkte unabhängig von der Klammersetzung sind

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1+a_2+\ldots+a_n, \quad \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

#3.) m>n: $\dfrac{\overbrace{a*a*a*\ldots*a}^{m\ mal}}{\underbrace{a*a*\ldots*a}_{n\,mal}} = a^{m-n}$,

m=n: $a^{m-n}=a^{m-m}=a^0=1$,

m=1: $\dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a*a*\ldots*a}_{n}} = \dfrac{a^0}{\underbrace{a*a*\ldots*a}_{n}} = a^{0-n}=a^{-n}$

m<n: $\dfrac{\overbrace{a*a*\ldots*a}^{m\ mal}}{\underbrace{a*a*a*\ldots*a}_{n}} = \dfrac{1}{\underbrace{a*a*\ldots*a}_{n-m}} = \dfrac{1}{a^{n-m}} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-m} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-(m-n)} = \dfrac{a^0}{\underbrace{a*a*\ldots*a}_{n-m}} = a^{0-(n-m)} =$

$= a^{\overbrace{m-n}^{<0}}$ usw Grundlagen Algebra

Andere Formulierungen:
Sind n reelle oder komplexe Zahlen $a_1,\ldots a_n$ gegeben, so bezeichnet im Folgenden $\sum_{j=1}^{n} a_j$ immer die Summe und $\prod_{j=1}^{n} a_j$ ihr Produkt. Sinngemäß schreiben wir Summen und Produkte von Zahlen, deren Nummerierung nicht bei 1, sondern bei 0 beginnt. Falls $n\le 0$ ist, soll immer $\sum_{j=1}^{n} a_j=0$ und $\prod_{j=1}^{n} a_j=1$ gelten.
Man sagt: Eine leere Summe ist gleich 0, ein leeres Produkt gleich 1.
Allgemeiner: Ist J eine endliche Indexmenge und ist $f: J\to \mathbb{K}$, j $f(j)=f_j$, eine beliebige Abb, so schreiben wir $\sum_{j\in J} f_j$ für die Summe der Zahlen f_j (und analog für das Produkt). Wegen der Kommutativität der Addition ist es dabei unerheblich, in welcher Reihenfolge wir die Zahlen addieren.
Ist etwa $J=\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}$, so ist $j\in J$ ein Zahlenpaar (i,k) und wir schreiben f_{ik} statt $f_{(ik)}$. Die Summe dieser Zahlen ist dann eine sogenannte Doppelsumme und wegen des Kommutativ- und Assoziativgesetzes gilt

$$\sum_{(i,k)\in J} f_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} f_{ik}\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} f_{ik}\right)$$

Entsprechendes gilt auch für Produkte.

Bem: $a_{\nu\mu}$ $(m_1\le\nu\le n_1,\ m_2\le\nu\le n_2)$ $m_1=m_2=1$ $n_1,n_2\in\mathbb{N}$.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n_2} \\ a_{21} & \ldots\ldots & & \ldots a_{2n_2} \\ \ldots & \ldots. & & \ldots.. \\ a_{n_1 1} & \ldots\ldots & & \ldots a_{n_1 n_2} \end{matrix}$$

$$\sum_{\nu=m_1}^{n_1} \sum_{\mu=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu} =: \sum_{\nu=m_1}^{n_1} b_\nu, \quad \sum_{\nu=m_1}^{n_1} b_\nu = \sum_{\mu=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu}.$$

$$= \sum_{\mu=m_2}^{n_2} \sum_{\nu=m_1}^{n_1} a_{\nu\mu}$$

---

a_{11} $\qquad\qquad$ $\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\nu\mu} = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{n} a_{\nu\mu}$.

a_{21} $\quad a_{22}$ $\qquad 1\le\nu\le n$

a_{31} $\quad a_{32}$ $\quad a_{33}$ $\qquad 1\le\mu\le\nu$

……. $\quad$ …….. $\quad$ …….

. $\quad$. $\quad$. $\quad$.

a_{n1} $\quad a_{n2}$ $\quad a_{n3}$ ……………….. a_{nn}

A1.5.7

a) $a_n := \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$, $n\in\mathbb{N}$. Zeige $a_n \ge \frac{1}{2}$.

Lös: $a_{n+1}<a_n$, $\frac{1}{2}<a_n<1 \ \forall\ n\ge 2$,

$$a_n - a_{n+1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2(n+1)-1} \frac{1}{k}$$

$$= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} ..+ \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} +..+ \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-1}{n(2n+1)} = \frac{2}{(2n+1)} > 0 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$$

Für $n\ge 2$: $a_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n-1} < \frac{(2n-1)-n}{n} < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$

(man braucht 2 Summanden, daher n>=2, größter Summand ist $\frac{1}{n}$)

für n=1: $a_n=1<1$,

$$a_n - \frac{1}{2} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \underset{n\ge 2}{>} \frac{n}{2n-1} - \frac{1}{2} = \frac{2n-(2n-1)}{4n-2} = \frac{1}{4n-2} > 0$$

gilt auch für n=1, dann $>\to\ge$

b) Vorbemerkung zur Induktion. Induktion kann bei $n_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen (vgl Bem nach S1.5.3)

Beweise: $\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0$

//**S1.5.1** (701) vollständigen Ind//

//Vor. $\forall\ n \in N$ sei $A_{(n)}$ eine von n abhängige Aussage gegeben und es

// gelte 1.) "$A_{(1)}$ ist wahr" (Induktionsanfang) und//

// 2.) $\forall\ n \in N$ (beliebige $n \in N$) folgt aus „$\underbrace{A_{(n)} \text{ist wahr}}_{IndHyp}$" auch//

// „$\underbrace{A_{(n+1)} \text{ist wahr}}_{IndAussage}$" so gilt: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall n \in N$//

// $\forall\ n \in N$ gilt $\underbrace{\Big(\underbrace{A_{(n)}}_{Induktionshypothese} \Rightarrow \underbrace{A_{(n+1)}}_{Induktionsbehauptung} \Big)}_{\text{Induktionsschluss}\, n \Rightarrow n+1}$ ist wahr//

//Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall\ n \in N$//

*//**S1.5.3** (703) Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung//*

//Vor: Aus „$A_{(m)}$ ist wahr" $\forall\ m \in \mathbb{N}$ mit $1 \le m \le n$ folgt stets „$A_{(n+1)}$ ist//

//wahr", so gilt: Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall\ n \in \mathbb{N}$//

//Bem: Induktion kann auch bei $n_0 \in N$ beginnen $B_{(n)} := A_{(n_0+n-1)}$ //

Bew: Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Induktion kann bei jedem Element von $\mathbb{Z}$ anfangen (mit A(n): "$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}$")

IAnf n=0 : $\sum_{\nu=1}^{0} \nu \underbrace{=}_{D\,1.5.2} 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$ wahr, d.h. $A_{(0)}$ wahr

IS $n \to n+1$ ($n \ge 0$): Z.z. $\underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}}_{A_{(n)}\ Indhyp} \Rightarrow \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n+1} \nu = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}}_{A_{(n+1)}\ Indbeh}$ ist wahr

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \nu \underbrace{=}_{D\,1.5.2} (n+1) + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} \nu}_{\text{Ind}\,Hyp = \frac{n(n+1)}{2}} = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)(1+n/2) =$$

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, damit ergibt sich die Beh aus S1.5.1 (vollständige Induktion) mit Induktionsanfang n=0 anstelle von n=1

c) $\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0$

Bew: Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$

$n=0 \quad : \sum_{\nu=1}^{0} \nu^2 \underbrace{=}_{D\,1.5.2} 0 = \frac{0\cdot(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$ wahr

$\underbrace{n}_{n>0} \quad n+1: \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^2 \underbrace{=}_{D\,1.5.2} (n+1)^2 + \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 \underbrace{=}_{IndHyp} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$

$(n+1)\left(n+1+\frac{n(2n+1)}{6}\right) = (n+1)\frac{6(n+1)+n(2n+1)}{6} = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} =$

$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

d) $\prod_{k=1}^{n} (1+1/k) = n+1$

Bew: Ihyp : $\prod_{k=1}^{n} (1+1/k) = n+1$

$n=1 \quad : \prod_{k=1}^{1} (1+1/k) = 1+1/1$

$n \mapsto n+1: \prod_{k=1}^{n} (1+1/k) = n+1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$\prod_{k=1}^{n+1} (1+1/k) = \prod_{k=1}^{n} (1+1/k)\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \underbrace{=}_{IHyp} (n+1)\frac{n+2}{n+1} = n+2 = (n+1)+1$

e) $\prod_{k=1}^{n} (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$ für $x_1,\ldots,x_n > 0$.

Wenn $x_1,\ldots,x_n = x: (1+x)^n \geq 1+nx$, siehe auch weiter unten S1.5.6 mit $x \geq -1$

Bew: $n=1 \quad : \prod_{k=1}^{1} (1+x_n) = 1+x_1 = 1+\sum_{k=1}^{1} x_k$

$n \to n+1: \prod_{k=1}^{n+1} (1+x_k) = \prod_{k=1}^{n} (1+x_k)(1+x_{n+1}) \geq \left(1+\sum_{k=1}^{n} x_k\right)(1+x_{n+1}) =$

$1 + \sum_{k=1}^{n} x_k + \underbrace{x_{n+1}}_{>0} + \underbrace{x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k}_{\leq 0} \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k$.

f) $\sum_{k=1}^{n} a_k * \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \geq n^2$ $(a_1,\ldots a_n > 0)$

Bew: Für $x,y>0$ gilt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2-2xy+2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2+2xy}{xy} \geq \frac{2xy}{xy} = 2$

Bew durch Induktion nach n

n=1: $\sum_{k=1}^{1} a_k * \sum_{j=1}^{1} \frac{1}{a_j} = \frac{a_1}{a_1} = 1^2$

n→n+1: Für n∈N gelte $\sum_{k=1}^{n+1} a_k * \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{a_j} = ((\sum_{k=1}^{n} a_k) + a_{n+1}))((\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}) + \frac{1}{a_{n+1}}) =$

$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} + a_{n+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} + \frac{1}{a_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \frac{1}{a_{n+1}} >$

$n^2 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_{n+1}}{a_j} + \frac{a_j}{a_{n+1}}\right) + 1 \geq n^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} n\right) + 1 = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} + 1 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$

g) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Bew: n=1: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$

n→n+1: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) =$

$(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + \frac{4n+4}{4}\right) = (n+1)^2\left(\frac{(n+2)^2}{4}\right) = \left(\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}\right)^2$

A1.5.8 Beweise: $\prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} a_{jk} = \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=k}^{n} a_{jk}$

Bew: 1. Möglichkeit:

K=:	1	2	3 …	n
j=1:	a_{11}			
j=2:	a_{21}	a_{22}		
j=3:	a_{31}	a_{32}	a_{33}	
.				
.				
j=n:	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}...	a_{nn}

$\prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} a_{jk} = \prod_{j=1}^{n} a_{j1}a_{j2}a_{j3}...a_{jj} = (a_{11})(a_{21}a_{22})...(a_{n1}...a_{nn}) =$

$= (a_{\underbrace{1}_{j}\underbrace{1}_{k}} ... a_{\underbrace{n}_{j}\underbrace{1}_{k}})(a_{\underbrace{2}_{j}\underbrace{2}_{k}} ... a_{\underbrace{n}_{j}\underbrace{2}_{k}})...(a_{\underbrace{n}_{j}\underbrace{n}_{k}})$

$= \prod_{j=k}^{n} a_{1k}a_{2k}...a_{nk}$

$= \prod_{k=1}^{n} a_{kk}a_{k+1k}...a_{nk} = \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=k}^{n} a_{jk}$

A1.5.9 Es seien $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_\nu \geq 0 \ \forall \ \nu = 1, ..., n$.

Beweise: $\prod_{\nu=1}^{n} (1+x_\nu) \geq 1 + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$.

Bew: $\prod_{v=1}^{n} (1+x_v)\underbrace{(1+x_{n+1})}_{\ge 0} \ge (1+\sum_{v=1}^{n} x_v)(1+x_{n+1}) = 1+\sum_{v=1}^{n+1} x_v + \underbrace{x_{n+1}\sum_{v=1}^{n} x_v}_{\ge 0} \ge 1+\sum_{v=1}^{n+1} x_v$

Durch vollständige Induktion:

n=1: $\prod_{v=1}^{1} (1+x_v) = 1+x_1 \ge 1+\sum_{v=1}^{1} x_v = 1+x_1$

n→n+1: $\prod_{v=1}^{n+1} (1+x_v) = (1+x_{n+1}) \prod_{v=1}^{n} (1+x_v) \ge (1+x_{n+1})(1+\sum_{v=1}^{n} x_v =$

$1+\sum_{v=1}^{n} x_v + x_{n+1} + \underbrace{x_{n+1}}_{\ge 0}\underbrace{\sum_{v=1}^{n} x_v}_{\ge 0} > 1+\sum_{v=1}^{n+1} x_v \Rightarrow$

A(n) ist wahr

A1.5.10 Es seien $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_{n+1} \in \mathbb{C}$, und es sei $A_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Zeige: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_{k+1}-b_k)$

Bew:Induktion nach n

oder $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_{k+1}-b_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{v=1}^{k} a_v (b_{k+1}-b_k) =$

$\sum_{v=1}^{n} a_v \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1}-b_k)}_{Teleskopsumme} = \sum_{v=1}^{n} a_v (b_{n+1}-b_v) = b_{n+1}A_n - \sum_{v=1}^{n} a_v b_v.$

oder rechte Seite:

$A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_{k+1}-b_k) = b_{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} a_v - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (b_{k+1}-b_k) \sum_{v=1}^{k} a_v}_{1 \le v \le k \le n} =$

$b_{n+1} \sum_{v=1}^{\infty} a_v - \sum_{v=1}^{n} a_v \sum_{k=0}^{\infty} (b_{k+1}-b_k) = \sum_{v=1}^{n} a_v (b_{n+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (b_{k+1}-b_k)) =$

$\sum_{v=1}^{n} a_v (b_{n+1}+b_v-b_{n+1}) = \sum_{v=1}^{n} a_v\, b_v$:linke Seite

S1.5.6(717)Unleichung von Bernoulli

Vor:$x \in \mathbb{R}$, $x \ge -1$, $n \in \mathbb{N}$

Beh: $(1+x)^n \ge 1+nx$, $(1+0)^n = 1+n*0x$, $(1+x)^0 = 1+0*x$, $(1+x)^1 = 1+1*x$,

Gleichheit gilt genau dann, wenn x=0 oder n=0 oder n=1

Bew:$A_{(n)}$: $(1+x)^n \ge 1+nx$

$A_{(1)}$: $(1+x)^1 \ge 1+1\cdot x$

n→n+1: $(1+x)^n \ge 1+nx \Rightarrow (1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\ge 1+nx}\underbrace{(1+x)}_{\ge 0} \ge (1+nx)(1+x) =$

$1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{n \ge 0} \ge 1+(n+1)x$

Bem:1.)n=0 $(1+x)^0 = 1 \ge 1+0\cdot x$

2.)Für $x \ge -1$, $n \ge 2$, $x \ne 0 \Rightarrow (1+x)^n > 1+nx$ anstelle von ≥

...Induktionsanfang n=2

#**S1.5.7**(715) Vor: $x,y \in \mathbb{R}$, $x,y>0$, $n \in \mathbb{N}$. Beh: $x<y \Leftrightarrow x^n<y^n$

#*//D1.2.1 (400)(K,+,*) angeordnet (O3) a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c //*

Bew:n=2 : $x<y \Leftrightarrow x*x \underbrace{<}_{D1.2.1(O3)} x*y \underbrace{<}_{D1.2.1(O3)} y*y \Leftrightarrow x^2<y^2$

IH n : $x<y \Leftrightarrow x^n<y^n$

\# $\quad n+1 \quad : x<y \Leftrightarrow x^n*x \underbrace{<}_{IH\ D1.2.1(O3)} y^n*x \underbrace{<}_{IH\ D1.2.1(O3)} y^n*y \Leftrightarrow x^{n+1}<y^{n+1}$

A1.5.11 Beweise $\forall\ n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 2$ die Ungleichung $1+\frac{1}{n}<(1+\frac{1}{n^2-1})^n$.

Bew: $(1+\frac{1}{n^2-1})^n \underbrace{\geq}_{Bernoulli} 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$, $\underbrace{\frac{n^2}{n^2-1}}_{>1} > 1+\frac{1}{n}$

A1.5.12
Vorbemerkung zur Induktion. Induktion kann bei $n_0\in\mathbb{Z}$ beginnen (vgl Bem nach S1.5.3). Beweise:
a) $n^2\leq 2^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0\setminus\{3\}$

*//**A1.2.9** (408)a)aus a<b und b≤c folgt a<c//*
//**S1.5.6**(718) Vor: $x\in\mathbb{R}$, $x\geq -1$, $n\in\mathbb{N}$ Beh: $(1+x)^n\geq 1+nx$

Bew: $n=0$: $0^2=0\leq 1=2^0$, $n=1$: $1^2=1\leq 2=2^1$, $n=2$: $2^2\leq 2^2$, $n=3$: $3^2\not\leq 2^3$

$n^2\leq 2^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$ wird unten durch Induktion nach n noch bewiesen. Dazu benötigt man Lemma:

$2n+1<2^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ Induktion nach n

$n=3 \quad : \quad 2\cdot 3+1=7<8=2^3$ wahr

$\underbrace{n}_{n\geq 3} \to n+1$: $2(n+1)+1=(2n+1)+2 \underbrace{<}_{IndHyp} 2^n+\underbrace{2}_{<2^n} <2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}$

Also: $2(n+1)+1<2^{n+1}$ (mit **A1.2.9** a)

Bem: $2\leq 2^n=(1+1)^n \underbrace{\geq}_{Bernoulli\ Ungl} 1+n\geq 2\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

Noch z.z.: $n^2\leq 2^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}, n\geq 4$...Induktion nach n

$n=4 \quad : \quad 4^2=16\leq 16=2^4$ wahr

$\underbrace{n}_{n\geq 4} \to n+1$: $(n+1)^2=\underbrace{n^2}_{\leq 2^n}+2n+1 \underbrace{\leq}_{\text{IndHyp } Abschätzung} 2^n+\underbrace{2n+1}_{\leq 2^n \text{ siehe oben da } n\geq 3}$

$\leq 2^n+2^n=2^{n+1} \Rightarrow (n+1)^2\leq 2^{n+1}$

Bem: Genauer gilt $n^2<2^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$, $n\geq 5$ oder $n\in\{0,1\}$
$n^2=2^n$ für $n\in\{2,4\}$
$n^2>2^n$ für $n=3$

b) $\sum_{v=1}^{2n}\frac{(-1)^{v+1}}{v}=\sum_{v=n+1}^{2n}\frac{1}{v}\quad\forall\ n\in\mathbb{N}_0$.

Vorüberlegung, Bsp

ν läuft links von 1 bis 2n, rechts von 1! bis 2n

n=0: 0=0

n=5: $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-+\ldots+\frac{1}{9}-\frac{1}{10} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$

n=6: $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-+\ldots+\frac{1}{11}-\frac{1}{12} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}$

//**D1.5.2** *(709)* $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu := \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{0} a_\nu := 0 \\ \sum_{\nu=1}^{1} a_\nu := a_1 \\ \sum_{\nu=1}^{m+1} a_\nu := a_{m+1} + \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu,\ 1 \le m \le n-1 \end{cases}$ //

Bew:Induktion nach n

n=0 : $\sum_{\nu=1}^{2\cdot 0} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \underbrace{=}_{D1.5.2} 0 \underbrace{=}_{D1.5.2} \sum_{\nu=1}^{0} \frac{1}{\nu} = \sum_{\nu=0+1}^{2\cdot 0} \frac{1}{\nu}$ wahr

n→n+1: $\sum_{\nu=1}^{2(n+1)=2n+2} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \underbrace{=}_{2xD1.5.2} \underbrace{\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}}_{\nu=1..2n}) + \underbrace{\frac{(-1)^{\overbrace{(2n+1)+1}^{gerade}}}{2n+1}}_{\nu=2n+1} + \underbrace{\frac{(-1)^{\overbrace{(2n+2)+1}^{ungerade}}}{2n+2}}_{\nu=2n+2}$

$\underbrace{=}_{IndHyp} \underbrace{\left(\sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{2n+1}}_{=\sum_{\nu=n+1}^{2n+1} \frac{1}{\nu}} + \frac{-1}{2n+2} = \left(\sum_{\nu=n+2}^{2n+1} \frac{1}{\nu}\right) + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}}_{=+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}=+\frac{1}{2n+2}} =$

$\sum_{\nu=n+2}^{2n+2} 1/\nu = \sum_{\nu=(n+1)+1}^{2(n+1)} 1/\nu$

* $(-1)^k = \begin{cases} 1, \text{falls } k \text{ gerade} \\ -1, \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$ (Bew. durch Ind nach k)

$\left(\sum_{\nu=n+1}^{2n} 1/\nu + \frac{1}{2n+1} = \sum_{\nu=n+1}^{2n+1} 1/\nu\right)$

A1.5.13 $M=\left\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

M={1/2; 1; 9/8; 1; 0,78125; 0,5625,…}……Vermutung:
Beh:inf M=0, min M existiert nicht ,sup M=max M=9/8

//***A1.5.12*** *(715) a)* $n^2 \le 2^n\ \forall\ n \in N_0 \setminus \{3\}$

//***S1.3.1*** *(501)Vor.:*K *angeordnet* $T \subset K$, $T \ne \emptyset$, $s \in K$

// *1.)* $\bar{s} = \sup T$: ⇔ *α)* $\bar{s}$ *ist obere Schranke von T und*

// *β)* $\forall\ \varepsilon > 0$ *ist* $\bar{s} - \varepsilon$ *keine obere Schranke von T*

// $\Leftrightarrow\ \forall\ t\in T:\ t\le \bar{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\bar{s}-\varepsilon$
// $\underline{s}$ = inf $T:\Leftrightarrow$ α) $\underline{s}$ ist untere Schranke von T und //
// β) $\forall\ \varepsilon>0$ ist $\underline{s}+\varepsilon$ keine untere Schranke von T//
// $\Leftrightarrow\ \forall\ t\in T:\ t\ge \underline{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon<\underline{s}+\varepsilon$//
// 2.) $\exists$ max$T$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ sup$T\in\mathbb{K}$ und sup$T\in T$: max$T$=sup$T$//
// $\exists$ min$T$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ inf$T\in\mathbb{K}$ und inf$T\in T$: min$T$=inf$T$//

Bew: (.) $\frac{n^2}{2^n}\le 1\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}\setminus\{3\}$ nach A1.5.12 a), für n=3: $\frac{n^2}{2^n}=9/8\ \underbrace{\Rightarrow}_{1\le 9/8}$

$\frac{n^2}{2^n}\le 9/8\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$ und $9/8\in M\ \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def max}}$ max $M=9/8\ \underbrace{\Rightarrow}_{\text{S1.3.1 2.)}}$ sup $M=9/8$.

(..) $\frac{n^2}{2^n}>0\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}\ \Rightarrow$ 0 ist untere Schranke von M

Noch z.z.* $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ m_\varepsilon\in M$ mit $m_\varepsilon<0+\varepsilon$. Dann folgt aus S1.3.1 2.)

inf $M=0\ \underbrace{\overbrace{\Rightarrow}^{\text{S1.3.1 2.)}}}_{0\notin M}$ min M existiert nicht

Bew: Sei $\varepsilon>0$ bel aber fest.

$\mathbb{N}$ unbeschränkt $\Rightarrow\ \exists\ \underbrace{n_0}_{\in n_0(\epsilon)}\in\mathbb{N}: n_0>1/\varepsilon$ bzw. $1/n_0<\varepsilon$.

O.B.d.A. $n_0\ge 10$

Setze $m_\varepsilon=\frac{n_0^2}{2^{n_0}}\ \Rightarrow\ m_\varepsilon\in M$ und $m_\varepsilon\ \underbrace{<}_{2^{n_0}>n_0^3}\ \frac{n_0^2}{n_0^3}=\frac{1}{n_0}<\varepsilon$.

Einschub: Beh $2^n>n^3\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}, n\ge 10$. Bew Induktion nach n

n=10: $2^{10}=1024>1000=10^3$

$n\ \underbrace{\mapsto}_{n\ge 10}\ n+1: (n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1\ \underbrace{<}_{IndHyp}\ 2^n+\underbrace{(3n^2+3n+1)}_{<2^n,\ \text{da}\ n\ge 10}<2^n+2^n=2^{n+1}$

Nebenrechnung: $3n^2+3n+1<2^n\ \ \forall\ n\in\mathbb{N},\ n\ge 10$
(stimmt auch für n=8 und n=9) Bew durch Induktion nach n

n=10: $3\cdot 10^2+3\cdot 10+1=331<1024=2^{10}$
n n+1: $3(n+1)^2+3(n+1)+1=(3n^2+6n+3)+(3n+3)+1=$
$(3n^2+3n+1)+(6n+6)\ \underbrace{<}_{IndHyp}\ 2^n+\underbrace{6(n+1)}_{<2^n(Induktion)}<2^n+2^n=2^{n+1}$

Beh: $6(n+1)<2^n\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}, n\ge 10$
n=10: 66<1000
n n+1: $6(n+2)=6(n+1)+6\ \underbrace{<}_{IndHyp}\ 2^n+\underbrace{6}_{<2^n}<2^n+2^n=2^{n+1}$