1.2(400) **Die Anordnungsaxiome**

Axiomatische Beschreibung einer linearen Anordnung aller Elemente eines Körpers

D1.2.1(400) Ein Körper $(K,+,*)$ heißt angeordnet: $\Leftrightarrow$ Auf K existiert eine Anordnungsrelation $R:=<$(„kleiner"), die folgende Eigenschaften (Anordnungsaxiome) erfüllt:

(O1) $\forall\ a,b\in K$ gilt genau eine der folgenden Eigenschaften:
$a<b$ oder $b<a$ oder $a=b$ (Trichotonie)
$\forall\ a,b\in K$ $((a,b))\in<$ oder $(b,a)\in<$ oder $a=b$)

(O2) Aus $a<b$ und $b<c \Rightarrow a<c$ (Transitivität) $\forall\ a,b,c\in K$
$(a,b)\in<$ und $(b,c)\in< \Rightarrow (a,c)\in<$

(O3) $a<b \Rightarrow a+c < b+c\ \forall\ c\in K$
$a<b$ und $0<c \Rightarrow a*c < b*c$ (Monotonie)
$(a,b)\in<$, $(a+c,\ b+c)\in<\ \forall\ c\in K$
$(a,b)\in<$ und $(0,c)\in< \Rightarrow (a*c,b*c)\in< \subset K\mathrm{x}K=K^2$

Bezeichnungen, Sprechweisen $a,b\in K$
K angeordneter Körper: $(K,+,*,<)$, $<\subset K\mathrm{x}K=K^2$
a kleiner b: $\Leftrightarrow a<b$,
a größer b: $\Leftrightarrow b<a$ bzw $a>b$
a ist positiv(negativ): $\Leftrightarrow 0<a$ bzw $a>0$ ($a<0$ bzw $0>a$)
a ist kleiner oder gleich b: $\Leftrightarrow a<b$ oder $a=b$, ($a\leq b, b\geq a$)
a ist größer oder gleich b: $\Leftrightarrow a>b$ oder $a=b$, ($a\geq b$)
a ist nicht negativ: $\Leftrightarrow a\geq 0\ \ 0\leq a$

Andere Formulierung (siehe auch A1.2.5. b). Besser erst nach A1.2.5 genauer lesen. K_+ ist für Lösung A1.2.5 wichtig):
Ein Körper K heißt geordnet, wenn es eine Teilmenge K_+ gibt, welche folgende Eigenschaften besitzt:

(O1*) $\forall\ a\in K$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:
$a\in K_+$ oder $-a\in K_+$ oder $a=0$
(O2*) $\forall\ a\in K_+: a+b\in K_+$
(O3*) $\forall\ a,b\in K_+: ab\in K_+$

Die Menge K_+ heißt auch postitiver Kegel von K und jedes $a\in K_+$ heißt positiv. Ist $-a\in K_+$, so heißt a negativ. Wir können also die Axiome (O1)-((O3) wie folgt in Worte fassen: Ein beliebiges $a\in K$ ist entweder positiv oder negativ oder =0, und Summe und Produkt von positiven Zahlen sind wieder positiv. Weiter setzten wir noch:
$a<b \Leftrightarrow b>a \Leftrightarrow b-a\in K_+$ $\qquad a\leq b \Leftrightarrow b\geq a \Leftrightarrow a=b$ oder $a<b$
Mit diesen Bezeichnungen folgt direkt aus (O1*), angewandt auf b-a:
$\forall\ a,b\in K$ gilt genau eine der drei Aussagen $a<b$ oder $a>b$ oder $a=b$

(400)Abgeleitete Rechenregeln in einem angeordneten Körper (RR<)

1.) $a<b \Leftrightarrow a-b < 0 \Leftrightarrow b-a>0$
Bew: Sei $a<b \underset{(O3)}{\Rightarrow} a+(-b)< b+(-b) \Rightarrow a-b<0$
$(a-b)+b<0+b \Leftrightarrow a+((-b)+b)<b \Rightarrow a+0<b \Rightarrow a<b......$
analog $0<b-a$

2.) $a>b \Leftrightarrow -a<-b$, speziell $a>0 \Leftrightarrow -a<0$

Bew: $a>b \Leftrightarrow b<a \underbrace{\Rightarrow}_{(O3)} b+(-b)<a+(-b) \Leftrightarrow 0<a+(-b) \underbrace{\Rightarrow}_{(O3)}$

$-a+0<((-a)+a)+(-b) \Leftrightarrow -a<0+(-b) \Leftrightarrow -a<-b$ $(\Rightarrow b<a)$

3.) (.) $a,b>0$ d.h. $a>0$ und $b>0 \Rightarrow ab>0$

(..) $a>0, b<0 \Rightarrow ab<0$,

(...) $a<0$ und $b<0 \Rightarrow ab>0$

Bew: (.) $a>0, b>0 \Rightarrow 0<a, 0<b \underbrace{\Rightarrow}_{(O3)} 0\cdot a<ab \Rightarrow 0<ab$

(..) $a>0, b<0 \Rightarrow 0<a,\ b<0 \underbrace{\Rightarrow}_{(O3)} ab<a\cdot 0 \Rightarrow ab<0$

(...) $a<0, b<0 \underbrace{\Rightarrow}_{2.)} -b>0=0 \underbrace{\Rightarrow}_{(O3)} a(-b)<0(-b)=0 \Rightarrow a(-b)<0 \Rightarrow a((-1)b)<0$

$\Rightarrow (-1)(ab)<0 \Rightarrow -(ab)<0 \underbrace{\Rightarrow}_{2.)} ab>0$

4.) $a\neq 0 \Rightarrow a^2:=a\cdot a>0$, speziell $1>0, -1<0$

Bew: $a\neq 0 \underbrace{=}_{(O1)} a>0$ oder $a<0 \underbrace{\Rightarrow}_{3.)} a^2=a\cdot a>0$

$1=1\cdot 1>0 \underbrace{\Rightarrow}_{2.)} -1<0$

5.) $a>0 \Leftrightarrow a^{-1}>0$

Bew: $a>0 \Rightarrow a\neq 0 \Rightarrow \exists\ a^{-1}$, Annahme $a^{-1}<0 \underbrace{\Rightarrow}_{3.)} 1=a\cdot a^{-1}<0$

$1<0$ Widerspruch $\Rightarrow a^{-1}>0$

Analog $a<0, a^{-1}<0$

6.) $a<b$ und $c<0 \Rightarrow ac>bc$

Bew: $\underset{(O3)}{\Rightarrow} a(-c)<b(-c) \Rightarrow a((-1)c)<b((-1)c) \Rightarrow (-1)(ac)<(-1)bc \Rightarrow$

$-(ac)<-(bc) \underbrace{\Rightarrow}_{2.)} ac>bc$

7.) $0<a<b \Rightarrow 0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

Bew: $0<a<b$, $a^{-1}>0$, $b^{-1}>0 \Rightarrow a<b \Rightarrow ab^{-1}<bb^{-1} \Rightarrow ab^{-1}<1 \Rightarrow a^{-1}(a(b^{-1}))<a^{-1}$
$\Rightarrow 1*b^{-1}<a^{-1} \Rightarrow b^{-1}<a^{-1}$

8.) $a=b$ genau dann, wenn $a\leq b$ und $b\leq a$

Bew: Sei $a\leq b$ und $b\leq a$ und $a\neq b \Rightarrow a<b$ und $b=a$ Widerspruch zu (O1)

Andere Formulierung:

$a\leq b$ und $b\leq a \Rightarrow a=b$ oder ($a<b$ und $a>b$) nicht möglich wegen (O1)

9.) $a<b \Rightarrow \exists\ c\in(K,<)$ (z.B. $c=(a+b)/2$, $2:=1+1$) mit $a<c<b \Rightarrow$

$\forall\ \lambda\in K$ mit $0<\lambda<1$ gilt $a < a\lambda+(1-\lambda)b < b$

Bew: $a-((a\lambda+(1-\lambda)b) = a(1-\lambda)-(1-\lambda)b = \underbrace{(1-\lambda)}_{>0}\underbrace{(a-b)}_{<0} \underbrace{<}_{3.)} 0$

Andere Formulierung:

Aus $0<\lambda<1$ folgt $\underbrace{\Rightarrow}_{RR\ Körper} 0>-\lambda>-1 \underbrace{\Rightarrow}_{(O3)} 1>1-\lambda>0 \Rightarrow$

$a=\lambda a+(1-\lambda)a \underbrace{\leq}_{(O3)} \lambda a+(1-\lambda)b \underbrace{<}_{(O3)} \lambda b+(1-\lambda)b=b \underbrace{\leq}_{(O3)}$

A1.2.1 Zeige: Aus $a<b$ folgt $a<(a+b)/2<b$

A1.2.2 Zeige: Ist $a\geq 0$, und gilt $\forall\ \varepsilon>0: a\leq\varepsilon$, so folgt $a=0$

A1.2.3 $a,b,c,d\in(K,>)$, $b,d>0$, $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ so gilt $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

Lös: $b+d>0$ und $1/b$, $1/d$, $\frac{1}{b+d}>0 \Rightarrow$

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a(b+d)<(a+c)b \Leftrightarrow ab+ad<ab+cb \Leftrightarrow ad<cb \Leftrightarrow \frac{a}{b}<\frac{c}{d} \text{ und}$$

$$\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d} \Leftrightarrow (a+c)d<(b+d)c \Leftrightarrow ad<bc \Leftrightarrow \frac{a}{b}<\frac{c}{d}.$$

Beide Ungleichungen sind äquivalent zu $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, was nach Vor richtig ist. Also folgt die Beh.

*//**A1.1.3** (303) $(K,+,*)$. $a\oplus b=a+b+2$, $a\otimes b:=2a+2b+a*b+2$,//*

// K^* : $\oplus$ und $\otimes$ …. $0=-2$, $-a=-a-4$, $1=-1$, $a^{-1}=\frac{-3-2a}{a+2}$ //

A1.2.4 Kann der Körper $(K,\oplus,\otimes)$ aus A1.1.3 angeordnet werden?

*//**D1.2.1** (400) $(K,+,*)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf K $R:=<$, Anordnungsaxiome://*

// (O3) $a<b \Rightarrow a+c<b+c\ \forall\ c\in K$, $a<b$ und $0<c \Rightarrow a*c<b*c$ //

Lös: Wir verwenden die gleichen Ordnungsrelationen wie beim ursprünglichen Körper. (O1) und (O2) gelten unverändert weiter, unabhängig von den Verknüpfungen

Zu (O3): Es seien $a,b,c\in K$ mit $a<b$

a) $a\oplus c<b\oplus c$:

$a<b \Rightarrow a+c+2<b+c+2 \Rightarrow a\oplus c<b\oplus c$

b) Wenn $c>0=-2$ dann folgt $a\otimes c<b\otimes c$:

$a<b \Rightarrow a(\underbrace{c+2}_{>0})<b(c+2)$

$\Rightarrow ac+2a<bc+2b \Rightarrow ac+2a+2c+2<bc+2b+2c+2 \Rightarrow$

$ac+2a+2c+2<bc+2b+2c+2 \Rightarrow a\otimes c<b\otimes c$

A1.2.5

a)Kann ein Körper mit 3 Elementen angeordnet werden?

//**(RR<)**(400) 4.)$a\neq 0 \Rightarrow a^2:=a\cdot a>0$, speziell $1>0,-1<0$//

*//**D1.2.1** (O2)(400)Aus $a<b$ und $b<c \Rightarrow a<c$ //*

Lös:Nein,denn:Sei K ein dreielementiger Körper $\Rightarrow$

K hat die Gestalt $\{0, 1, -1\}$, (0 und 1 liegen in jedem Körper, dazu $-0=0$ und -1, wobei $-1\neq 1$, da sonst 2 elementiger Körper)

$(1\neq 0,\ 1\neq -1)$.

Es gilt hier $2:=1+1=-1$, denn $1+0=1$, $1+(-1)=0$.

Wäre $1+1=1$, so $1=0$ weil auch $1+0=1$ Widerspruch bzw

$1+1=0$, so $1=-1$ da auch $1+(-1)=0$ Widerspruch $\Rightarrow$

Annahme:K kann angeordnet werden? $\Rightarrow$

$$0 \underbrace{<}_{4.)} 1=1+0 \underbrace{<}_{(O2)..0<1} 1+1=2\in K=\{0,1,-1\} \Rightarrow 0<1<1+1=2$$

Falls $2=0 \Rightarrow 0 \underbrace{<}_{(O2)} 2=0$ Widerspruch,

Falls $2=1 \Rightarrow 1<2=1$ Widerspruch,

Falls $2=-1 \Rightarrow 0<2=-1$ Widerspruch zu Regel (4) $\Rightarrow$

Annahme falsch, also kann K nicht angeordnet werden

oder: $0<1=1+0<1+1=-1 \Rightarrow 0<-1$ Widerspruch zu (O1),

denn $0>-1$ (ausführlich steht hier $0<1$ und $1<-1$)

Bem:Kein endlicher Körper kann angeordnet werden

(Beweisidee: $0<1<2<3...<-1$ Widerspruch)

b) Beweise: Ein Körper K ist genau dann ein angeordneter Körper, wenn eine Teilmenge $P\subset K$ existiert, so dass gilt:

(P1) Für jedes $x\in K$ gilt genau eine der Alternativen $x=0$, $x\in P$ oder $-x\in P$.

(P2) Aus $x,y\in P$ folgt $x+y\in P$

(P3) Aus $x,y\in P$ folgt $xy\in P$

*//**D1.2.1** (400) (K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf R:=<, Anordnungsaxiome://*
//(O1) ∀ a,b∈K gilt genau eine der folgenden Eigenschaften://
// a<b oder b<a oder a=b (Trichotonie) //
*//**(RR<)** (400) 2.) a>b ⇔ -a<-b, speziell a>0 ⇔ -a<0//*
//siehe auch D1.2.1 andere Formulierung//

Bew: "⇒" K angeordnet ⇒ (P1)...(P3) gilt

Def $P:=\{x\in K: x>0\}$ ⇒ $P\subset K$ (Menge der postiven Elemente von K) ⇒ ...Rechne P(1)...P(3) nach.

- Zu P(1): Sei $x\in K$ beliebig. Setze $a=x$ und $b=0$ $\underbrace{\Rightarrow}_{(01)}$

  Es gilt genau eine der drei Aussagen:
  - $x<0$ oder • $0<x$ oder • $x=0$, d.h.
  - $-x>-0=0$ oder • $x>0$ oder • $x=0$, d.h.
  - $x=0$ oder • $x<0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{RR\ 2.)} -x>0$ oder • $x>0$ d.h
  - $x=0$ oder • $-x>0\in P$ oder • $x\in P$

*//(O3) a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K   a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c //*
//(O2) Aus a<b und b<c ⇒ a<c (Transitivität) ∀ a,b,c∈K//

- Zu P(2): Seien $x,y\in P$, d.h. $x>0, y>0$ ⇒ $x=x+0 \underbrace{<}_{(O3),\, mit\ 0<y} y+x=x+y$

  $\underbrace{\Rightarrow}_{(O2)}$ $0<x+y$, d.h. $x+y\in P$

*//**(RR<)** (400) (.) a,b>0 d.h. a>0 und b>0 ⇒ ab>0 //*
// (..) a>0, b<0 ⇒ ab<0, //
// (...) a<0 und b<0 ⇒ ab>0//

- Zu (P3): Es seien $x,y\in P$ ⇒ $0<x$ und $0<y$ ⇒ $0*y<x*y$ ⇒ $x*y\in P$

"⇐" Sei $P\subset K$ mit (P1)-(P3) erfüllt.

Definition Relation < auf K: durch $a<b :\Leftrightarrow b-a\in P$.

Rechne jetzt (O1)-(O3) nach:

(O1) (400) a<b oder b<a oder a=b (Trichotonie)

- Zu (O1): Seien $a,b\in K$ beliebig. Mit $x:=b-a$ folgt aus (P1): Es gilt genau eine der 3 folgenden Aussagen
  - $x=0$ oder • $x\in P$ oder • $\underbrace{-x}_{-(b-a)}\in P$, d.h.
  - $b-a=0$ $(a=b)$ oder • $a<b$ oder • $a-b\in P$, d.h.
  - $\underbrace{a=b}_{b-a=0(Bew\ Körperax)}$ oder • $a<b$ oder • $b<a$

  Nebenrechnung: $-(b-a)=a-b$, denn
  $-x=-(b+(-a))=-b-(-a)=-b+(-(-a))=-b+a=a+(-b)=a-b$

(O2)(400)Aus a<b und b<c ⇒ a<c
(A1)(300)(a⊕b)⊕c= a⊕(b⊕c) ∀ a,b,c∈K,
(A2) a⊕0= a ∀ a∈K
(A3) a⊕(-a)=0
(A4) a⊕b = b⊕a ∀ a,b∈K

- Zu (O2):Seien a<b und b<c d.h.
  b-a∈P und c-b∈P(nach Def von <) ⇒ c-a=
  $\underbrace{(c-b)}_{x:\in P}+\underbrace{(b-a)}_{=:y\in P}\in P$ nach (P2) $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def} <}$ a<c
  ausführlicher: Klammern werden weggelassen
  wegen (A1), c-a $\underbrace{=}_{(A2)}$ c+0-a $\underbrace{=}_{(A3).(A4)}$ $\underbrace{c+(-b)}_{=c-b}$ +b-a)

*//(O3)(400)(.)a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, (..)a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c //*
// (403)(P3)Aus x,y∈P folgt xy∈P//

- Zu (O3):(.)Sei a<b und c∈K beliebig, d.h. b-a∈P ⇒
  (b+c)-(a+c) $\underbrace{=}_{A2,A3}$ b-a∈P $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def} <}$ a+c<b+c
  (..)Sei a<b und c>0 d.h. b-a∈P und c-0∈P ⇒
  bc-ac $\underbrace{=}_{\text{Körperax, (D und Rechenr.}}$ $\underbrace{(b-a)}_{\in P}\underbrace{c}_{\in P}$ ∈P(nach (P3) ⇒
  ac<bc
  ausführlich: bc-ac=bc+(-(ac))=bc+(-a)c=
  (b+(-a))c=(b-a)c)

c)Zeige, dass ein angeordneter Körper unendlich viele Elemente haben muss.

A1.2.6 Beweise $\frac{a}{1+a}\le\frac{b}{1+b}$ für 0≤a≤b , a,b∈R.

*//(O3)(400)a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c//*
Lös:Für a=0 oder a=b ist die Beh erfüllt
Es sei 0<a<b $\underbrace{\Rightarrow}_{(O3}$ a+ab $\underbrace{<}_{(O3}$ b+ab ⇒ a(1+b)<b(1+a) $\underbrace{\Rightarrow}_{1+b>0,\ 1+a>0}$

$\frac{1}{1+a}*\frac{1}{1+b}>0$ $\underbrace{\Rightarrow}_{(O3}$ a(1+b) $\frac{1}{1+a}*\frac{1}{1+b}$ <b(1+a) $\frac{1}{1+a}*\frac{1}{1+b}$ ⇒

$\frac{a}{1+a}<\frac{b}{1+b}$

A1.2.7 Seien a,b,c,d Elemente eines angeordneten Körpers. Bestimme alle $x\in K$, für die gilt:

a)*: $\frac{d}{b+c} < \frac{d}{x+c} \le \frac{d}{a+c}$ (0<a<b, 0<c, d beliebig)

Lös:1. Fall d>0 $\Rightarrow d^{-1}>0$

$\Leftrightarrow 0< \frac{1}{b+c} < \frac{1}{x+c} \le \frac{1}{a+c} \underbrace{\Leftrightarrow}_{b,c>0\Rightarrow b+c>0\Rightarrow \frac{1}{b+c}>0} a+c\le x+c<b+c \Leftrightarrow$

$a\le x<b$(*) $\Rightarrow a\le x<b$ (notwendig)

$a\le x<b \Rightarrow$ (*) hinreichend

2. Fall d=0 (*) $0<0\le 0$ nie erfüllt für $x\in K$.

3. Fall d<0

(*)$\Leftrightarrow \frac{1}{a+c} \le \frac{1}{x+c} < \frac{1}{b+c} \Rightarrow b<x\le a$ notwendig, nicht hinreichend, da a<b nie erfüllt.

b) Ist b,d>0 und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so gilt $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Bew:Es ist b+d>0 und $\frac{1}{b}, \frac{1}{d}, \frac{1}{b+d} >0 \Rightarrow$

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a(b+d)<(a+c)b \Leftrightarrow ab+ad<ab+cb \Leftrightarrow ad<cb \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ und

$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a+c)d<(b+d)c \Leftrightarrow ad<bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Beide Ungleichungen sind äquivalent zu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, was nach Vor richtig ist. Also folgt die Beh.

c)*: $x^2+(a-b)x-ab\ge 0$ $(a,b\ge 0)$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{0<a,b,-a<0<b}$

Lös:* $\Leftrightarrow (x+a)(x-b)\ge 0 \Leftrightarrow$

- $[(x+a)\ge 0$ und $(x-b)\ge 0]$ oder • $[(x+a)\ge 0$ und $(x-b) \le 0]$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{0<a,b,-a<0<b}$
- $(x\ge -a$ und $x\ge b)$ oder • $(x\le -a$ und $x\le b)$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{0<a,b,-a<0<b}$ $x\ge b$ oder $x\le -a$

D1.2.2(405) Sei $K=(K,+,^*,<)$ ein angeordneter Körper und $T\subset K$, $T\neq\emptyset$.

Ein Element $\overline{m}\in T$ heißt das Maximum von T ($\overline{m}$=maxT):$\Leftrightarrow$ $\forall$ $t\in T$ gilt $t\le\overline{m}$

Ein Element $\underline{m}\in T$ heißt das Minimum von T ($\underline{m}$=min T):$\Leftrightarrow\forall$ $t\in T$ gilt $\underline{m}\le t$

Bem:1.) Zu $T\subset K$, $T\neq\emptyset$ muß kein maxT bzw minT existieren

2.) Sei $T_1\subset T_2\subset K$ und $\exists$ $\overline{m}_i$=maxT_i, i=1,2 $\Rightarrow \overline{m}_1\le\overline{m}_2$

Bew:$\forall$ $t\in T_2$: $t\le\overline{m}_2$, $\overline{m}_1\in T_1\subset T_2 \Rightarrow \overline{m}_1\le\overline{m}_2$

$T_1\subset T_2\subset K$ $\exists$ $\overline{m}_1$=maxT_1, $\overline{m}_2$=max$T_2 \Rightarrow t\le\overline{m}_2$ $\forall$ $t\in T_2$

Da $\overline{m}_1\in T_1\subset T_2 \Rightarrow \overline{m}_1\le\overline{m}_2$

Analog gilt $\exists$ $\underline{m}_i$=minT_i, i=1,2 $\Rightarrow \underline{m}_1\ge\underline{m}_2$

3.) Wenn für $T\subset K$, $T\neq\emptyset$ maxT oder minT existiert, so ist dieses eindeutig.

*//(**RR<**) (400) 8.) a=b genau dann, wenn a≤b und b≤a//*

Bew: Annahme $\overline{m}_1, \overline{m}_2$ seien ein maxT, d.h. $\overline{m}_1\geq t$, $\overline{m}_2\geq t \Rightarrow$

$\overline{m}_1, \overline{m}_2\in T$ und $\forall$ $t\in T$: $t\leq\overline{m}_1$ und $t\leq\overline{m}_2$ mit $t=\overline{m}_2$ bzw $t=\overline{m}_1 \Rightarrow$

$\overline{m}_2\leq\overline{m}_1$ und $\overline{m}_1\leq\overline{m}_2$ $\underbrace{\Rightarrow}_{8.)\,RR<}$ $\overline{m}_1=\overline{m}_2$

oder siehe weiter unten D1.3.1 zusätzliche Ausführungen

Bsp: Sei K angeordneter Körper und $T:=(0,1]:=\{x\in K \mid 0<x\leq 1\} \Rightarrow$

1.) maxT=1 da $1\in T$ und es gilt $x\leq 1$ $\forall$ $x\in T$

2.) T hat kein Minimum

*//(**RR<**) (400) 9.) a<b ⇒ ∃ c∈(K,<) mit a<c<b ⇒ //*

// ∀ λ∈K mit 0<λ<1 gilt a < aλ+(1-λ)b < b//

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf R:=<, Anordnungsaxiome://*

// (O2) Aus a<b und b<c ⇒ a<c ∀ a,b,c∈K//

Bew: 1.) Def T $\Rightarrow$ $x\leq 1$ $\forall$ $x\in T$ und $1\in T$ $\Rightarrow$ 1=maxT

2.) Annahme: $\exists$ $\min T=\underline{x}\in T \Rightarrow 0<\underline{x}\leq 1$ und $x\geq\underline{x}$ $\forall$ $x\in T$ $\underbrace{\Rightarrow}_{RR<9.)}$

$\exists$ $x_0\in K$: $0<x_0<\underline{x}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{(O2)}$ $0<x_0<1 \Rightarrow$ $x_0\in T$ und $x_0<\underline{x}$ $\Rightarrow$

Widerspruch zur Def $\underline{x}$ =minT

Andere Formulierung:

Annahme: $x_0=\min T \Rightarrow x_0>0$ (wegen $x_0\in T$) $\underbrace{\Rightarrow}_{(RR<)}$ $0<\dfrac{x_0+0}{2}<x_0\leq 1$,

$\dfrac{x_0}{2}\in T$ und $\dfrac{x_0}{2}<\min T$ Widerspruch, also existiert minT nicht.

D1.2.3 (407) Sei K angeordneter Körper und $a\in K$ dann heißt

$|a|:=\max\{a,-a\}=\begin{cases} a \text{ falls } a\geq 0 \\ -a \text{ falls } a<0\end{cases}$ der Absolutbetrag von a

Bem: 1.) Offensichtlich existiert das max wie angegeben

2.) Für $a,b\in K$ heißt $d=|a-b|$ der Abstand von a und b

S1.2.1 (407) Vor: K sei angeordneter Körper und $a,b\in K$

- Beh: 1.) $|a|=|-a|$

  Bew: $|a|:=\max\{a,-a\}=\max\{-a,-(-a)\}=:|-a|$

- 2.) $|a|\geq 0$ und $|a|=0 \Leftrightarrow a=0$

//D1.2.1 (400)(K,+,) angeordnet: ⇔ ∃ auf R:=<, Anordnungsaxiome://*

//(O1) ∀ a,b∈K gilt genau eine der folgenden Eigenschaften://

// a<b oder b<a oder a=b//

Bew: $|a|\geq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{(o1)}$ $a>0$ oder $a<0$

• 3.) $|ab|=|a||b|$

Bew: $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$, $|ab|=0, |a|=0$ oder $|b|=0$

$a>0$ und $b>0 \Rightarrow ab>0 \Rightarrow |ab|=ab=|a|\cdot|b|$

$a>0$ und $b<0 \Rightarrow -b>0 \Rightarrow a(-b)>0 \Rightarrow |a\cdot b|= -(ab)=$

$a(-b)= |a|\cdot|b|$

$a<0$ und $b<0 \Rightarrow a\cdot b=(-a)(-b)>0 \Rightarrow |ab|=ab=$

$(-a)(-b)=|a|\cdot|b|$

• 4.) (.) $b\neq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}=|a|\cdot|b|^{-1}$, speziell (..) $|b^{-1}|=|b|^{-1}$

Bew: (.) $|\frac{a}{b}\cdot b|=|a| \underset{3.)}{=} |\frac{a}{b}||b| \Rightarrow \frac{|a|}{|b|}=|\frac{a}{b}|$

(..) $1=|1|=|bb^{-1}|=|b||b^{-1}| \Rightarrow |b^{-1}|=\frac{1}{|b|}$

• 5.) $a=0 \Leftrightarrow |a|<\varepsilon\ \forall\varepsilon\in K$ mit $\varepsilon>0$

*//**(RR<)** (400) 9.) $a<b \Rightarrow \exists\ c\in(K,<)$ mit $a<c<b \Rightarrow$ //*
// $\forall\ \lambda\in K$ mit $0<\lambda<1$ gilt $a < a\lambda+(1-\lambda)b < b$ //

Bew: „$\Rightarrow$„ $a=0 \Rightarrow |a|=0 \Rightarrow 0<\varepsilon\ \forall\varepsilon>0,\ \varepsilon\in K$

„$\Leftarrow$„ Sei $|a|<\varepsilon\ \forall\varepsilon\in K, \varepsilon>0$. Annahme $a\neq 0 \Rightarrow$

$|a|>0$ $(0<\frac{0+|a|}{2}<|a|) \Rightarrow$ Widerspruch, da mit

$\varepsilon_0=|a|>0 \underbrace{\Rightarrow}_{9.)} \exists\ \underline{\varepsilon}>0$ mit $0<\underline{\varepsilon}<\varepsilon_0=|a|$

• 6.) $|a+b|\leq|a|+|b|$ (Dreiecksungleichung)

*//**D1.2.1** (400) (K,+,*) angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf R:=<, Anordnungsaxiome://*
// (O3) $a<b \Rightarrow a+c < b+c\ \forall\ c\in K$, $a<b$ und $0<c \Rightarrow a*c < b*c$ //

Bew: Aus Def $|a|,|b| \Rightarrow \pm a\leq|a|, \pm b\leq|b| \underset{(O3)}{\Rightarrow} (\pm a)+(\pm b)\leq|a|+|b| \Rightarrow$

$\pm(a+b)\leq|a|+|b| \Rightarrow \max\{(a+b),-(a+b)\}=|a+b|\leq|a|+|b|$

• 7.) $|a+b|\geq||a|-|b||\geq|a|-|b|$

Bew: $|a|=|a+b-b| \underbrace{\leq}_{6.)} |a+b|+|-b|=|a+b|+|b|$

$|b|=|a+b-a|\leq|a+b|+|a| \Rightarrow |a|-|b|\leq|a+b|$, $|b|-|a|\leq|a+b| \Rightarrow$
$\pm(|a|-|b|)\leq|a+b| \Rightarrow ||a|-|b||\leq|a+b|$

• 8.) $||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$

Linke Ungleichung heißt Dreiecksungleichung nach unten.

Bew: $\pm a\leq|a|, \pm b\leq|b| \Rightarrow \pm(a\pm b)\leq|a|+|b| \Rightarrow |a\pm b|\leq|a|+|b|$.

Weiter ist $|a|=|a\pm b\ \ b|\leq|a\pm b|+|b|$ und genauso ist
$|b|\leq|a\pm b|+|a| \Rightarrow \pm(|a|-|b|)\leq|a\pm b| \Rightarrow ||a|-|b||\leq|a\pm b|$

A1.2.8 Zeige: Für a<b<0 ist |a|>|b|>0

A1.2.9 Es seien a,b,c Elemente eines angeordneten Körpers K. Zeige:
a) aus a<b und b≤c folgt a<c

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf R:=<,Anordnungsaxiome://*
//(O2) Aus a<b und b<c ⇒ a<c ∀ a,b,c∈K//

Bew: 1.Fall b=c, a<b=c d.h. a<c
2.Fall b≠c ⇒ b<c $\underbrace{\Rightarrow}_{a<b(O2)}$ a<c

b) |a+b|=|a|+|b| gilt genau dann, wenn a,b≥0 oder a,b≤0.
Bew: "⇒„ Sei |a+b|=|a|+|b|..
Annahme (a<0 oder b<0) und (a>0 oder b>0) ⇒
(a<0 und b>0) oder (a>0 und b<0).
O.B.d.A.: a<0 und b>0 (sonst vertausche a und b)

-a+b $\underbrace{=}_{\text{Def } Betrag}$ |a|+|b|=|a+b|= $\begin{cases} a+b \text{ falls } a+b>0 \\ -(a+b), \text{ falls } a+b<0 \end{cases}$ ⇒

-a=a oder b=-b ⇒ 2a=0 oder 2b=0 $\underbrace{\Rightarrow}_{2\neq 0}$

$\underbrace{a=0 \text{ oder } b=0}_{\text{angeordneter Koerper}}$ Widerspruch, also Annahme falsch,
d.h. a,b≥0 oder a,b≤0

„⇐„ Sei a,b≥0 oder a,b≤0.
1.Fall: a,b≥0 ⇒ a+b≥0 ⇒ |a+b| $\underbrace{=}_{Def}$ a+b=|a|+|b| $\underbrace{(-a)+(-b)}_{-(a+b)}$

2.Fall: a,b≤0 ⇒ a+b≤0
Bew: -a≥0, -b≥0 $\underbrace{\Rightarrow}_{s\,1.Fall}$ $\underbrace{(-a)+(-b)}_{-(a+b)}$ ≥0 ⇒ a+b≤0

|a+b| $\underbrace{=}_{(a+b)\leq 0}$ -(a+b)=-a-b=(-a)+(-b)=|a|+|b|

Andere Formulierung:
Bew: „⇐„ Sei a≥0 und b≥0 dann gilt |a|+|b|= $\underbrace{a+b}_{\geq 0}$ =|a+b|.

Wenn a≤0 und b≤0 dann |a|+|b|= $\underbrace{-a-b}_{\geq 0}$ =|-a-b|=|a+b|.

"⇒„ $|x|^2=x^2$ da $x^2=(-x)^2$ (siehe auch c)
Sei |a+b|=|a|+|b| ⇒ $|a+b|^2=(|a|+|b|)^2=|a|^2+2\underbrace{|ab|}_{RR}+|b|^2$ ⇒

2ab=2|ab| ⇒ ab≥0 d.h. (a≥0 und b≥0) oder wenn (a≤b und b≤0)

Hierbei wurde benutzt: $x^2=\begin{cases} x \cdot x \\ (-x) \cdot (-x) \end{cases} =|x||x|=|x|^2$

c) $a^2<b^2$ gilt genau dann, wenn |a|<|b|

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf R:=<,Anordnungsaxiome://*
// (O2)Aus a<b und b<c ⇒ a<c ∀ a,b,c∈K//
*// (O3)a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c//*

Bew:"⇒„Sei $a^2<b^2$.

1.Möglichkeit:

Annahme $|a|\geq|b| \Rightarrow \underbrace{|a|^2}_{a^2} = a^2 = |a|\cdot|a| \underbrace{\geq}_{\text{mit (O3)}} |a|\cdot|b| \geq \underbrace{|b||b|}_{|b|^2=b^2} = b^2 \underset{(O2)}{\Rightarrow}$

$a^2\geq b^2$ Widerspruch, also Annahme falsch d.h. $|a|<|b|$

*//**(RR<)**(400) 2.)a>b ⇔ -a<-b, speziell a>0 ⇔ -a<0//*
// 3.)(.)a,b>0 d.h. a>0 und b>0 ⇒ ab>0 //
// (..)a>0,b<0 ⇒ ab<0, //
// (...) a<0 und b<0 ⇒ ab>0//

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf R:=<,Anordnungsaxiome://*
*// (O3)a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c //*

2.Möglichkeit:

$(b-a)(b+a)=b^2-a^2>0 \underbrace{\Rightarrow}_{RR\,3.)} b-a>0$ und $b+a>0$ oder $b-a<0$ und $b+a<0 \Rightarrow$

$(b>a$ und $b>-a)$ oder $\underbrace{(b<a \text{ und } b<-a)}_{-b>-a \text{ und } -b>a} \Rightarrow$

$b>|a|$,insbesondere $b>0$, oder
$-b>|a|$,insbesondere $-b>0$, $\Rightarrow |b|>|a|$

„⇐„Sei $|a|<|b| \Rightarrow a^2=|a|^2=|a||a| \underbrace{\leq}_{(O3)\text{da }|a|<|b|} |a||b| \underbrace{\leq}_{(O3)da\,|b|>0,|a|<|b|}$

$|b||b|=|b|^2=b^2$ d.h. $a^2\leq|a||b|$ und $|a||b|<b^2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Vgl Teil }a} a^2<b^2$

Hierbei wurde benutzt:

$x^2=\begin{cases} x\cdot x \\ (-x)\cdot(-x)\end{cases} = |x||x|=|x|^2$ sowie

$x<y, 0\leq z \Rightarrow xz\leq yz$ (Bew:1. Fall:$z=0 \Rightarrow xz=0\leq 0=yz$
2. Fall: $z\neq 0$, d.h. $z>0 \underbrace{=}_{(O3)} xz<yz \Rightarrow$
$xz\leq yz$)

d) $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2\geq 4ab$

*//D**1.1.1** (300/301)//*
//Menge min 2 Elemente: K //
// (K,⊕,⊗): ⇔ ∃ 2 Abbildungen ⊕: KxK→K und ⊗: KxK→K //
//(A1) (a⊕b)⊕c= a⊕(b⊕c) ∀ a,b,c∈K//
*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf K R:=<,Anordnungsaxiome://*
*//(O3)a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c //*

Bew: $(a+b)^2-4ab=(a^2+2ab+b^2)-4ab \underbrace{=}_{\text{Rechenr. in K}} a^2-2ab+b^2=(a^2+2a(-b)+(-b)^2)=$

$(a-b)^2\geq 0$ (wg $x^2>0 \ \forall\ x\in K\setminus\{0\}$) $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{A1 ... mit (O3)}} (a+b)^2\geq 4ab$

$0\leq(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \Rightarrow 2ab\leq a^2+b^2 \Rightarrow 4ab\leq a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$
weil $a^2+2ab+b^2\leq 2a^2+2b^2 \Rightarrow 2ab\leq a^2+b^2 \Rightarrow 0\leq a^2-2ab+b^2 \Rightarrow 0\leq(a-b)^2$

Andere Formulierung für $(a+b)^2\geq 4ab$:

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\geq 4ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$. Die Aussage $(a-b)^2\geq 0$ ist aber richtig (RR im Körper) und daher auch die äquivalente Aussage $(a+b)^2\geq 4ab$

A1.2.10 Beweise: $\frac{x+y}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$ für $x,y\in\mathbb{R}$.

*//**A1.2.6** (404) $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$ für $0\leq a\leq b$, $a,b\in R$.//*

Bew: $\frac{x+y}{1+|x+y|} \leq \frac{\overbrace{|x+y|}^{a}}{1+\underbrace{|x+y|}_{a}} \underbrace{\leq}_{A1.2.6} \frac{\overbrace{|x|+|y|}^{b}}{1+\underbrace{|x|+|y|}_{b}} =$

$\frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$

A1.2.11 $(a_n)\in\mathbb{R}$, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\in\mathbb{R}, a_n \leq c\in\mathbb{R} \;\; \forall\; n\in\mathbb{N}$.

a) Zeige $a\leq c$

Bew: Sei $\varepsilon>0$, $N\in\mathbb{N}$: $|a_n-a|<\varepsilon \;\forall\; n\geq N \Rightarrow a_n-\varepsilon<a<a_n+\varepsilon<c+\varepsilon$

Annahme $a>c \Rightarrow a>c$, $a<c+\varepsilon \Rightarrow 0<a-c<\varepsilon \;\forall\; \varepsilon>0$

$\varepsilon:=\frac{a-c}{2}>0 \Rightarrow 0<a-c<\frac{a-c}{2}$ …...Widerspruch!

b) $a_n:=1-\frac{1}{n}<1=c \;\;\forall\; n\in\mathbb{N}$.

Lös: $a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} :a \Rightarrow a=c$

D1.2.4(412) Für $a \in \mathbb{R}$ heißt

sgn $a = \begin{cases} 1 \text{ für } a > 0 \\ 0 \text{ für } a = 0 \\ -1 \text{ für } a < 0 \end{cases}$ das Vorzeichen oder das Signum von a und

$|a| = a *$ sgn $a = \begin{cases} a \text{ fuer } a >= 0 \\ -a \text{ fuer } a < 0 \end{cases}$ der Betrag von a

S1.2.2(412) $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ gilt

1.) $a=b \Leftrightarrow |a|=|b|$ und sgn a=sgn b
2.) sgn(ab)=(sgn a)(sgn b), $|ab|=|a||b|$
3.) $b \neq 0 \Rightarrow$ (sgn a)/(sgn b)=sgn(a/b), $|a/b|=|a|/|b|$