**D0.2.4**(200) Eine Abbildung(Funktion) f: $X\to Y$ heißt

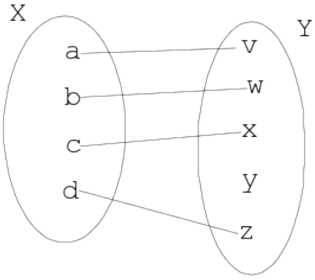
1.) injektiv(eindeutig) oder Injektion: $\Leftrightarrow$

$\forall\ x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,

d.h. jedes $y\in Y$ hat max 1 Urbild $x\in X$ mit $y=f(x)$,

d.h. $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

#Bsp




Wertebereich Y kann auch "zu groß" gewählt sein

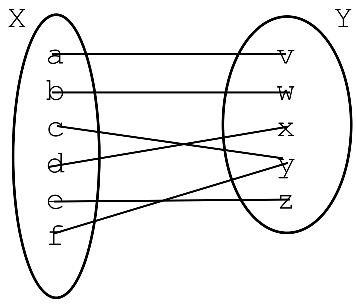
f, d.h. für <u>alle</u> x Element von X existiert <u>genau ein</u> y.....

2.) surjektiv (Surjektion) (Abb von X auf Y): $\Leftrightarrow$ $Y=f(X)$,

(d.h. für $\forall\ y\in Y\ \exists$ mindestens ein $x\in X$: $y=f(x)$),

d.h.Wertebereich nicht zu groß gewählt

#Bsp




auch hier:f, d.h. $\forall\ x\in X\ \exists_1\ y$.....

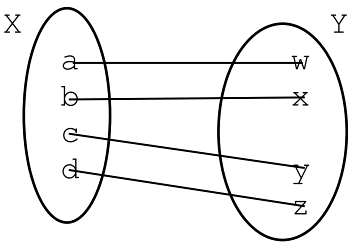
3.) bijektiv oder Bijektion: $\Leftrightarrow$ f ist injektiv und surjektiv

Zu jedem $y\in Y$ gibt es genau ein $x\in X$ mit $f(x)=y$.

In diesem Fall heißt die Funktion/Abb. $f^{-1}: Y\to X$ definiert durch $f^{-1}(y):=x$ für $y=f(x)$ die Umkehrabbildung oder Umkehrfunktion oder inverse Funktion zu f, $y \mapsto x$, wobei x dasjenige Element aus X sei, für das $y=f(x)$ gilt.

Eine Bijektion f: $X\to X$ heißt Permutation von X

#Bsp




f,d.h.jedem $x\in X$ ist genau ein $y\in Y$ zu geordnet, $\forall\ y\in Y$ auf Grund der Eigenschaft surjektiv.

Bem:1.) Falls f nicht bijektiv, so existiert keine Umkehrfunktion auf Y

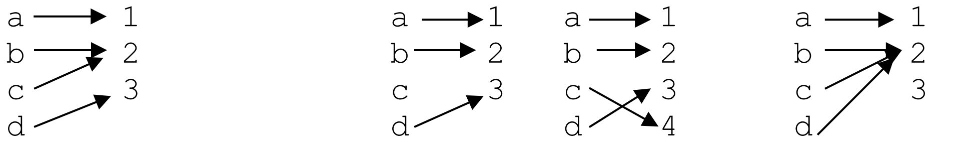
2.) Achtung: $f^{-1}(B)$ Urbild ist verschieden von $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion

Bsp:1.) f: $\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ mit $f(z)=z^2$ ist weder injektiv (denn $f(-z)=(-z)^2=f(z)\ \ \forall\ z\in\mathbb{Z}$) noch surjektiv (denn z.B. hat 3 kein Urbild, $\#z^2=3$: $z\notin\mathbb{Z}$)

2.) f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ (:=\{r\in\mathbb{R}\ |r\geq 0\})$, die jeder Zahl ihren absoluten Betrag zuordnet, ist nicht injektiv, aber surjektiv.

3.) Abb der Menge {1,2,3} in sich mit f(1)=1, f(2)=3, f(3)=2 ist sowohl injektiv als auch surjektiv, also bijektiv.

4.) A={a,b,c,d}, B={1,2,3} bzw B={1,2,3,4}



| | | | |
|---|---|---|---|
| surjektiv | keine Funktion | bijektiv | $f(A)=\{1,2\}\neq B$ |
| $f(\{a\})=\{1\}$ | kein Bild von c | | |
| $f(\{a,b\})=\{1,2\}$ | | | |
| $f^{-1}(\{1,2\})=\{a,b,c\}$ | | | |
| $f^{-1}(B\})=A$ | | | |

**L0.2.1**(201) Vor: X endliche Menge. $f: X\to X$

Aussage: a) f injektiv b) f surjektiv c) f bijektiv sind äquivalent.

Bew: $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, $n\in\mathbb{N}$.

a)⇒ b): f injektiv $\Rightarrow \{f(x_1),f(x_2)\dots,f(x_n)\}\subset X$ hat n Elemente $\Rightarrow$ $\{f(x_1),f(x_2)\dots,f(x_n)\}=X \Rightarrow$ f surjektiv

b)⇒ c): f surjektiv $\Rightarrow \{f(x_1),f(x_2)\dots,f(x_n)\}$ hat n Elemente $\underset{a)b)}{\Rightarrow}$

die n Elemente müssen verschieden sein ⇒ f injektiv $\underset{a)}{\Rightarrow}$

f bijektiv

c)⇒ a): c): f bij. ⇒ f inj

**S0.2.2**(201)

Es sei eine bijektive Abbildung $f:X\to Y$ mit Umkehrfunktion $f^{-1}:Y\to X$ gegeben, dann gilt:

$f^{-1}(f(x))=x\ \forall\ x\in X$ und $f(f^{-1}(y))=y\ \forall\ y\in Y$

Bew: Sei $x\in X$ baf. Setze $y=f(x)$, d.h. nach Def ist $x=f^{-1}(y)=f^{-1}(f(x))$

Sei $y\in Y$ baf. $\underset{f\ bij}{\Rightarrow}\ \exists\ x\in X$ mit $f(x)=y$, d.h. $x=f^{-1}(y)$, $y=f(x)=f(f^{-1}(y))$

**A0.2.9** Gegeben sei die Funktion $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,3,5,7\}$ mit $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=7$, $f(4)=7$, $f(5)=5$.

Bestimme $f(\{1,2,3\})$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{5\})$, $f^{-1}(\{5,7\})$

Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

Ist $f_{|\{1,2,3\}}$ injektiv, surjektiv, bijektiv?

Lös: $f(\{1,2,3\})=\{f(1),f(2),f(3)\}=\{1,3,7\}$,

$f^{-1}(\{3\})=\{x\in\{1,2,3,4,5\}\mid f(x)=3\}=\{2\}$,

$f^{-1}(\{5\})=\{x\in\{1,2,3,4,5\}\mid f(x)=5\}=\{5\}$

$f^{-1}(\{5,7\})=\{x\in\{1,2,3,4,5\}\mid f(x)=\{5,7\}\}=\{5,3,4\}$

f injektiv? $\exists\ x_1,x_2\in\{1,2,3,4,5\}$ mit $x_1\neq x_2: 3\neq 4$ mit $f(x_1)=f(x_2)$:
$f(3)=7,\ f(4)=7,\ f(3)=f(4)=7 \Rightarrow$ f nicht injektiv

f surjekiv? Sei $X=\{1,2,3,4,5\}, Y=\{1,3,5,7\}$
$\forall\ y\in Y=\{1,3,5,7\}\ \exists$ mindestens ein $x\in X$ mit $f(x)=y$:
$f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)=7,\ f(4)=7,\ f(5)=5$
f ist surjektiv (für y=7 existieren sogar 2 Elemente aus X mit f(x)=y)

f bijektiv? Nein, da f nicht injektiv (f(3)=f(4)).

$f_{|\{1,2,3\}}$ injektiv? $X'=\{1,2,3\}, f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)=7$,
$Y=\{1,3,5,7\}\ \forall\ x_1,x_2\in X'$ und $x_1\neq x_2: f(x_1)\neq f(x_2)$ Ja!

$f_{|\{1,2,3\}}$ surjektiv? $Y=f(X')$, $f(x)\neq 5$ für $x\in\{1,2,3\}$ Nein!

$f_{|\{1,2,3\}}$ bijektiv? $f_{|\{1,2,3\}}$ ist injektiv und nicht surjektiv $\Rightarrow$ Nein!

**A0.2.10** Gebe an/zeige: Eine Abbildung f von X nach Y ist genau dann injektiv/nicht injektiv, wenn gilt:

a) $x,x'\in X$ und $x\neq x'$ folgt $f(x)\neq f(x')$
Lös: injektiv

b) Gibt es zu jedem $y\in Y$ höchstens ein $x\in X$ mit $f(x)=y$ so ist f injektiv

c) Gibt es zu jedem $x\in X$ genau ein $y\in Y$ mit $f(x)=y$, so ist f trotzdem nicht injektiv.

d) Wenn für $x,x'\in X$ mit $f(x)=f(x')$, $x=x'$ ist, so ist f injektiv

e) Gibt es eine surjektive $f:[0,1]\to[0,1]$?

Lös: $f(x)=\begin{cases} x, falls\ x\in[0,1) \\ 0, fallsx=1 \end{cases} \Rightarrow$ ja

**A0.2.11** Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}$ in sich sind injektiv, welche sind surjektiv?
$f(x)=x^3$, $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$, $f(x)=|x|$, $f(x)=e^x$.

**A0.2.12** Gegeben sei eine Menge $M\neq\emptyset$ und deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

a) Bestimme eine injektive Abbildung $f:M\to\mathcal{P}(M)$.

Lös: # $\{x\}\in M\in\mathcal{P}(M)$.
# Bei der injektiven Abbildung müssen nicht alle Elemente von $\mathcal{P}(M)$
# abgebildet werden
$f(x)=\{x\} \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ folgt $\{x_1\}=\{x_2\} \Rightarrow x_1=x_2$

b) Beweise, dass es keine surjektive Abbildung $g: M\to\mathcal{P}(M)$ geben kann.
Hinweis: Betrachte die Menge $A=\{x\in M \mid x\neq g(x)\}$

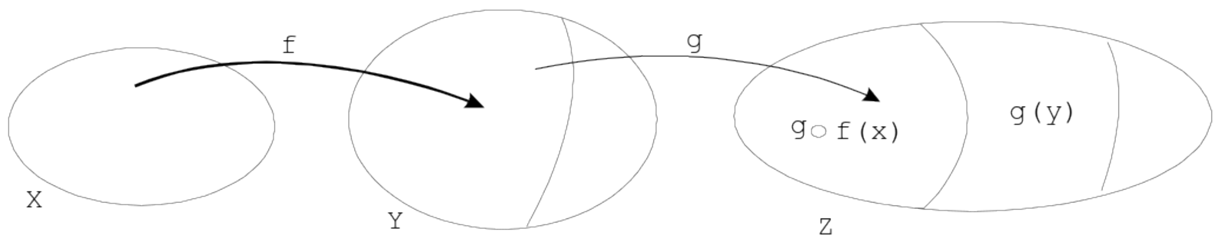
Bew: # Bsp: $M=\{1,2,3\} \Rightarrow$
# $\mathcal{P}(M)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\},\{1,2,3\}\}$
# Sei $x\in M$, g surjektiv
# $g(x)\in\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\}\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\},\{1,2,3\}\}$
# $x\neq g(x)\in\{\emptyset,\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\},\{1,2,3\}\}=A$

#       g surjektiv ⇒ ∃ $x_0=2\in M$ mit $g(2)\in A$ ⇒  $2\neq g(2)$,
#       Bsp: $g(2)=\{2,3\}\in A$
#       $x_0=2\in A=\{\emptyset,\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ ⇒  $2\neq g(2)\in A$ ⇒
#       $2\notin A$ ⇒ Widerspruch
#       oder
#       $x_0=2\notin\{\emptyset,\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\},\{1,2,3\}\}=A$  ⇒ $2=g(2)\in A$ ⇒ Widerspruch
#    ??????

Annahme...Es existiert eine solche Abb $g:M\to P(M)$ surjektiv.
Sei $A=\{x\in M \mid x\neq g(x)\}$.
g surjektiv ⇒ ∃ $x_0\in M$ mit $g(x_0)\in A$ #d.h. $x_0\neq g(x_0)$}#,
da $P(M)$ außer allen $x\in M$ noch weitere Elemente enthält und diese wegen Surjektivität einen Partner in M haben müssen.
Dann ist $x_0\in A$  ⇒  $x_0\neq g(x_0)\in A$.
oder $x_0\notin A$  ⇒ $x_0=g(x_0)\in A$ ⇒ Widerspruch
?????
Annahme einer surjektiven Funktion $g:M\to P(M)$ muss also falsch gewesen sein.(...auch für ∞ große $P(M)$ richtig, # deshalb obige
# Beweisführung, in ∞ kann nicht argumentiert werden, dass M weniger
# Elemente hat als $P(M)$)

**D0.2.5**(202) Seien $f: X\to Y$ und $g:Y\to Z$ vorgegeben, dann heißt die Abb.$g\circ f$: $X\to Z$ definiert durch x  $g(f(x))$ ∀ $x\in X$ die zusammengesetzte oder verkettete Funktion aus f und g (Komposition von f mit g)

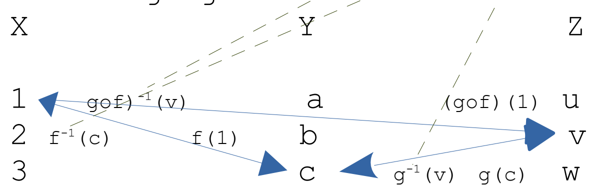
Bsp:




Bem:1.)● Die Komposition ist assoziativ:
$(h\circ g)\circ f= h\circ(g\circ f)$; $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$
Bew: Sei $h:X\to Y$, $g: Y\to Z$, $f: Z\to W$, $x\in X$.
$$f\circ(g\circ h)(x) \underbrace{=}_{D0.2.5} f((g\circ h)(x)) \underbrace{=}_{D0.2.5} f(g(h(x))) \underbrace{=}_{D0.2.5} f\circ g(h(x)) \underbrace{=}_{D0.2.5} (f\circ g)\circ h(x)$$

●● aber nicht kommutativ
$g\circ f\neq f\circ g$ (siehe auch A0.2.15 S 205)

2.)Sind $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ bijektive Abb, dann ist auch $g\circ f:X\to Z$ bijektiv und die Umkehrfunktion $(g\circ f)^{-1}:Z\to X$ ist gegeben durch $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$
Orientierungssjkizze



**A0.2. 13** Es seien $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ Funktionen. Zeige:

a) f surjektiv, $g\circ f$ injektiv $\Rightarrow$ g injektiv

b) g injektiv, $g\circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ surjektiv

c) Aus $g\circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv

d) Aus $g\circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv

e) Sind f und g injektiv $\Rightarrow$ $g\circ f$ injektiv

Bew: $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$, $x,x'\in X$,

$g\circ f$ injektiv falls gilt: $g\circ f(x)=g\circ f(x') \Rightarrow x=x'$

wie folgt

$$x=x' \underbrace{\Rightarrow}_{f\ injektiv} f(x)=f(x')$$

$$g\circ f(x)=g(\underbrace{f(x)}_{y})=g(y) \underbrace{=}_{g\ injektiv\ und\ y=f(x)=f(x')=y'} g(y')=g(\underbrace{f(x')}_{y'}) \Rightarrow$$

$$g(y) = g(y') \underbrace{\Rightarrow}_{g\ injektiv} y=y' \Rightarrow$$

$$y= f(x)=f(x')=y' \underbrace{\Rightarrow}_{f\ injektiv} x=x'$$

f) Sind f und g surjektiv $\Rightarrow$ $g\circ f$ surjektiv

Bew: $z\in Z$, $\underbrace{\exists}_{g\ surjektiv}\ y\in Y: f(y)=z\ \forall z\in Z.$ $\underbrace{\exists}_{f\ surjektiv}\ x\in X: g(x) \underbrace{=}_{g\ surjektiv} y\ \forall y\in Y$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{f\ surjektiv} f\circ g(x)=f(g(x))=f(y)=z \Rightarrow f\circ g \text{ surjektiv}$$

g) Folgere aus c) und d): f,g bijektiv $\Rightarrow$ $g\circ f$ bijektiv und zeige, dass dann $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

**D0.2.6** (203) Seien X,Y beliebige Mengen $\neq\emptyset$ und $A\subset X$ und Funktionen gegeben $f: X\to Y$ $g: A\to Y$, dann heißt

1.) $id_x: X\to X$ mit $x\ \ x\ \forall x\in X$ die Identität auf X oder identische Abb. auf X

2.) g die Restriktion (oder Einschränkung) von f auf A: $\Leftrightarrow$ $g(x)=f(x)\ \forall x\in A$. Bez: $g=f|_A$

3.) f eine Fortsetzung von g von A auf X: $\Leftrightarrow$ $g= f|_A$ ??? von A auf X

4.) Wenn eine Funktion $f:X\to Y$ bijektiv, dann gilt $f^{-1}\circ f=id_x$ und $f\circ f^{-1}=id_Y$

Bem: 1.) $id_x$ ist bijektiv und $id_x^{-1} = id_x$

2.) $f: X\to Y$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $f(A)\cap f(B)=f(A\cap B)\ \forall A,B\subset X$

*//(107)* ***Eigenschaften von Bild und Urbild einer Funktion f //***

*//b) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)\ \forall A,B\subset X$ //*

Bew: "$\Rightarrow$" Stets gilt $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

Sei $y\in f(A)\cap f(B) \underbrace{\Rightarrow}_{f\ injektiv} x_1\in A,\ x_2\in B \wedge y=f(x_1)=f(x_2) \underbrace{\Rightarrow}_{f\ injektiv}$

$x_1=x_2=x_\cap \Rightarrow$

$x_\cap\in A\cap B \Rightarrow y\in f(A\cap B) \Rightarrow f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B) \Rightarrow$

$f(A)\cap f(B) = f(A\cap B)$

"$\Leftarrow$" falsche Annahme:

$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)\ \forall\ A,B\subset X,$
$x_1,x_2\in X,\ x_1\neq x_2,\ A=\{x_1\},\ B=\{x_2\} \Rightarrow A\cap B=\emptyset,\ f(A\cap B)=\emptyset$
$\wedge$ f nicht injektiv $\Rightarrow$
$f(A)=f(x_1)=f(x_2)=f(B)=y \Rightarrow$
$f(A)\cap f(B)=\{y\}\neq\emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Annahme $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)\ \forall\ A,B\subset X$ falsch $\Rightarrow$
$x_1\neq x_2,\ f(x_1)\neq f(x_2) \Rightarrow f: X\to Y$ ist injektiv

3.) $f: X\to Y$ bijektiv $g: Y\to Z$ bijektiv $\Rightarrow$
● $g\circ f: X\to Z$ bijektiv und ●● $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$
Bew:● $f(X)=Y,\ g(Y)=Z \Rightarrow (g\circ f)(X)=Z \Rightarrow g\circ f$ surjektiv
Wähle $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2) \Rightarrow g(\underbrace{f(x_1)}_{y_1}) = g(\underbrace{f(x_2)}_{y_2}) \Rightarrow$

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow$ $g\circ f$ injektiv

$\Rightarrow g\circ f$ bijektiv
●● $y=f(x),\ z=g(y)=(g\circ f)(x) \Rightarrow$
$x=f^{-1}(y),\ y=g^{-1}(z) \Rightarrow x=f^{-1}(y)=f^{-1}(g^{-1}(z))=(f^{-1}\circ g^{-1})(z)\ \forall\ z\in Z$
$\Rightarrow (g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

Andere Formulierung:
*//D0.2.6 (203) $X,Y\neq\emptyset$ & $A\subset X$ & $f: X\to Y$ $g: A\to Y$ //*
*// 1.) $id_X: X\to X$ mit $x \quad x\ \forall\ x\in X$*
Bew: Definiere $F=(g\circ f)$ und $G=f^{-1}\circ g^{-1}$ dann ist z.z., dass
F bijektiv mit Umkehrabb G. $F:X\to Z,\ G:Z\to X$.
$F(X)=g\circ f(X)=g(f(X))=g(Y)=Z$, d.h. F ist surjektiv
Andererseits gilt für $x\in X$
$G(F(x))=G(g\circ f(x))=f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(g(f(x)))}_{=f(x)})=f^{-1}(f(x))=x$, d.h.
$G\circ F=id_X \underset{D0.2.61)}{\Rightarrow}$ F ist injektiv #müsste das nicht bewiesen werden?
Also ist F bijektiv mit Umkehrabb $F^{-1}:Z\to X$, wobei $F(x)=z \Leftrightarrow$
$x=F^{-1}(z)$. Beachte, dass gilt $G(z)=G(F(x))=x=F^{-1}(z)$

**A0.2.14** $f:X\to Y$. Zeige: f surjektiv $\Leftrightarrow \exists\ g:Y\to X$ mit $f\circ g=id_Y$
//**D0.2.6**(203) Seien X,Y beliebige Mengen $\neq\emptyset$ und $A\subset X$ und Funktionen gegeben
// $f: X\to Y$ $g: A\to Y$, dann heißt
// 1.) $id_X: X\to X$ mit $x \quad x\ \forall\ x\in X$ die Identität auf X oder
// identische Abb. auf X
Lös:"$\Leftarrow$" $y \underset{D0.2.6\ 1.)}{=} id_Y(y)=(f\circ g)(y)=f(\underbrace{g(y)}_{x})=f(x) \Rightarrow$
alle Elemente von Y werden von x erreicht, f ist surjektiv
„$\Rightarrow$" definiere $g:Y\to X,\ g(y)=x$ (wobei $f(x)=y$) d.h. zu jedem y
finde ich mindestens ein x da surjektiv.
$(f\circ g)(y)=f(g(y))=f(x)=y=id_y$

**A0.2.15** Geg sei eine nichtleere Menge X und 2 Funktionen $f,g:X\to X$. Beweise oder widerlege: Es gilt stets $f\circ g=g\circ f$

//**D0.2.3**(106)

//1.)Seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$. Eine (eindeutige ) Abbildung oder Funktion f

// von X in Y oder von X nach Y ist eine Relation von X zu Y ($f\subset X\mathrm{x}Y$)

// mit der Eigenschaft: $\forall\ x\in X:\ \exists$ genau ein ($\exists_1$) $y\in Y$ mit $(x,y)\in f$

//3.)Bei geg Funktion f: $X\to Y$ heißt

/ b)Y der Wertebereich oder Wertevorrat oder Bildbereich von f

Lös:#Wertebereich muss nicht gleich X sein

Setze z.B.:$X=\{0,1\}$ und definiere

$f:X\to X$ durch $f(0)=f(1)=0$ und $g:X\to X$ durch $g(0)=g(1)=1\ \Rightarrow$

$f(g(0))=f(g(1))=f(1)=0\ \wedge\ g(f(0))=g(f(1))=g(0)=1\ \Rightarrow$

$f\circ g\neq g\circ f$ !!!

**A0.2.16**

a) Gegeben: $f:A\to B$, $A_1\subset A$, $B_1\subset B$.

Beweise: $A_1\subset f^{-1}(f(A_1))$.

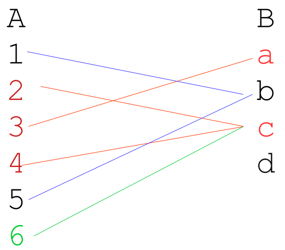
Lös:Sei $x\in A_1$. Def $y=f(x)\ \wedge\ B_1=f(A_1)\ \underbrace{\Rightarrow}_{y\in B_1}\ f^{-1}(B_1)=\{z\in A\,|\,f(x)=y=f(z)\in B_1\}$

$\Rightarrow$ x erfüllt die Bedingung $f(z)\in B_1$, denn $f(x)=y\in B_1\Rightarrow$

$x\in f^{-1}(B_1)=f^{-1}(f(A_1))$

$f^{-1}(f(A))=A$ gilt im Allgemeinen nicht. Gegenbeispiel siehe b)

#Lös: Bsp




$A_1=\{2,3,4\}$

$f(A_1)=\{a,c\}$ $\quad f^{-1}(f(A_1))=\{2,3,4,6\}$

$A_1=\{2,3,4\}\subset f^{-1}(f(A_1))=\{2,3,4,6\}$

Sei $x\in A_1$ baf $\Rightarrow\ y\in f(A_1)\ \wedge\ f(x)=y\ \Rightarrow$

$\exists\ x\in A_1:f^{-1}(y)=x\ \vee\ (\exists\ x'\in A\backslash A_1:f^{-1}(y)=x'\ \wedge\ \exists\ x\in A_1:f^{-1}(y)=x)$

$\Rightarrow\ x\in A_1\ \wedge\ x\in f^{-1}(f(A_1))\ \Rightarrow\ A_1\subset f^{-1}(f(A_1))$.

b)Geg: X,Y Mengen $\neq\emptyset$, f: $X\to Y$, $A\subset X$, $B\subset Y$, $f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$

Zeige: $f^{-1}(B)=\{x\in X\,|\ f(x)\in B\}$

$\Rightarrow$

$f(f^{-1}(B))=B$ gilt im allgemeinen nicht. Gegenbeispiel

Bew: Sei $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$, mit $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$

$\wedge$ $f:X\to Y$ definiert durch $f(x_1)=f(x_2)=y_1$ (d.h. $f(X)=y_1$),

$\wedge$ $A=\{x_1\}\subset X$, und $B\underset{B\subset Y}{=}Y=\{y_1,y_2\}\ \Rightarrow$

Gegenbeispiel:

$f^{-1}(f(A))=f^{-1}(\{y_1\})=\{x_1,x_2\}=X\neq A\ \wedge\ f(f^{-1}(B))=f(\underbrace{\{x_1,x_2\}}_{=X})=\{y_1\}\neq B$

Bem:(.) $f^{-1}(f(A))=A\ \forall\ A\subset X\ \Leftrightarrow$ f injektiv

(..) $f(f^{-1}(B))=B\ \forall\ B\subset Y\ \Leftrightarrow$ f surjektiv

c)f ist injektiv $\Leftrightarrow f(\bigcap_{M\in S} M)=\bigcap_{M\in S} f(M)\ \ \forall\ S\subset\mathcal{P}(X), S\neq\emptyset$

*//D0.2.6 Bem: 2.)(203)f: $X\to Y$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $f(A)\cap f(B)=f(A\cap B)$ $\forall A,B\subset X$//*

*//(107)Eigenschaften von Bild und Urbild einer Funktion f//*
//b) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$ $\forall$ $A,B\subset X$,
// $f(\bigcap_{M\in S} M)\subset \bigcap_{M\in S} f(M)$, $M\subset X$

Bew: "$\Leftarrow$" $(f(A)\cap f(B) \underbrace{=}_{\text{D0.2.6 Bem 2}} f(A\cap B)) \underbrace{\Rightarrow}_{S=A,B;\ \text{beliebige } A,B\in X} \bigcap_{M\in S} f(M)=f(\bigcap_{M\in S} M) \Rightarrow$ f injektiv

"$\Rightarrow$" Sei $S\subset \mathcal{P}(X)$, $S\neq\emptyset$ bel. $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{(107) b)}}$ $f(\bigcap_{M\in S} M)\subset \bigcap_{M\in S} f(M)$.

Noch z.z. $f(\bigcap_{M\in S} M)\supset \bigcap_{M\in S} f(M)$ wie folgt

$y\in \bigcap_{M\in S} f(M) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Def }\cap} \forall\, M\in S: y\in f(M) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Def Bild}}$

$\forall\, M\in S\ \exists\ x_M\in M$ mit $y=f(x_M)$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{f \text{ injektiv}}$ $\forall\, M\in S\ \exists\ x\in M$ mit $y=f(x)$ und zwar

dasselbe x $\forall$ $M\in S$

"$\Leftarrow$"klar

"$\Rightarrow$" $f(x_{M_1})=f(x_{M_2}) \underbrace{\Leftrightarrow}_{f \text{ injektiv}} x_{M_1}=x_{M_2}$

$\Leftrightarrow\ \exists\ x\in \bigcap_{M\in S} M$ mit $y=f(x)$ $\Leftrightarrow$ $y\in f(\bigcap_{M\in S} M)$

Bem: Es wurde sogar $\bigcap_{M\in S} f(M)=f(\bigcap_{M\in S} M)$ bewiesen

**A0.2.17** $f:X\to Y$. Zeige dass immer gilt $f\circ id_X=f$ und $id_Y\circ f=f$

**A0.2.18** $f:X\to Y$ bij und $f^{-1}$ die Umkehrfkt.
Zeige $f\circ f^{-1} = id_Y$, $f^{-1}\circ f= id_X$

**A0.2.19** Sei angenommen, daß eine Funktion g:Y X existiert, sodass $f\circ g=id_Y$, $g\circ f= id_X$. Zeige, dass dann f bijektiv und $g=f^{-1}$ ist.
Was kann man schließen, wenn nur $f\circ g=id_Y$ oder $g\circ f= id_X$ gilt?

**S0.2.3**(206)
Vor:Sei f: $X\to Y$ eine bijektive Funktion mit Umkehrfunktion $f^{-1}$: $Y\to X$
Beh: $f^{-1}\circ f= id_X$ und $f\circ f^{-1}= id_Y$ oder
$(f^{-1}\circ f)(x)=x$ $\forall$ $x\in X$ und $(f\circ f^{-1})(y)=y$ $\forall$ $y\in Y$
d.h. $f^{-1}(f(x))=x$ $\forall$ $x\in X$ und $f(f^{-1}(y))=y$ $\forall$ $y\in Y$
Bew: Sei $x\in X$ beliebig und setze $y:=f(x)$ $\underbrace{\Rightarrow}_{f \text{ bijektiv}}$ $x=f^{-1}(y)$
$\Rightarrow$ $x=f^{-1}(f(x))$, $f^{-1}\circ f= id_X$
Analog sei $y\in Y$, Setze $x=f^{-1}(y)$ $\Rightarrow$ $y=f(x)=f(f^{-1}(y)$ d.h. $f\circ f^{-1}=id_Y$

**S0.2.4** (206)
a) Sei f: $X\to Y$ umkehrbar (invertierbar), dann ist die inverse Abbildung g eindeutig bestimmt.

//D0.2.5 Bem:1.)● $(h\circ g)\circ f= h\circ(g\circ f)$; $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$
// ●● $g\circ f\neq f\circ g$

Bew: h,g: X→Y inverse Abbildungen, zu zeigen h=g

$g = g\circ I_{d_y} = g\circ (f\circ h) \underbrace{=}_{D\,0.2.5\,Bem\,1} (g\circ f)\circ h = I_{d_x}\circ h = h \Rightarrow g=h$

Nebenrechnung.. $g\circ I_{d_y}$ =g...Sei y∈Y ⇒ $g\circ I_{d_y}(y)=g(I_{d_y}(y))=g(y)$

Analog.. $I_{d_x}\circ h = h$

b) f: X→Y ist invers (umkehrbar) ⇔ f ist bijektiv
Siehe auch A0.2.20

Bew:"⇒" f invertierbar, zu zeigen f • injektiv & •• surjektiv
Sei g die inverse Abb auf X.

• Sei x,x'∈X, $f(x) \underbrace{=}_{f\ injktiv,\ sofern\ dann\ x=x'} f(x') \Rightarrow x=g(f(x))=g(f(x'))=g\circ f\,(x')=x'$

⇒ g Injektiv

•• ∀ y∈Y: x= $\underbrace{g}_{inverse\ Abb\ zu\ f}(y)$∈X ⇒ ∀ y∈Y ∃ x∈X : f(x)=f(g(y))= $f\circ g\,(y)=y$

⇒ f surj.

"⇐" Sei y∈Y $\underbrace{\Rightarrow}_{f\ bijektiv \Rightarrow f\ surjektiv}$ ∃ Urbild zu y ∀ y∈Y: x∈X, f(x)=y

$\underbrace{\Rightarrow}_{f\ bijektiv \Rightarrow f\ injektiv}$ $\exists_1$ solches x, benannt g(y).

So definieren wir eine Abb g: Y→X.
zu zeigen g ist invers zu f: X→Y ist invertierbar ⇔ ∃ g: Y→X:
Sei x∈X, $f(\underbrace{g(f(x))}_{x'}) = f(x') \underbrace{\Rightarrow}_{f\ bijektiv \Rightarrow f\ injektiv} x=x' \Rightarrow x=g(f(x)) = g\circ f(x) \underbrace{\Rightarrow}_{x\ beliebig}$

$g\circ f = I_{d_x}$

Umgekehrt f(g(y))=y gilt nach Konstruktion ∀ y∈Y, also $f\circ g = I_{d_y}$

**A0.2.20**

Es seien X,Y Mengen ≠∅ und f:X→Y eine Abbildung. Zeige:
a)f ist injektiv ⇔ ∃ g:Y→X mit gof=$id_x$

Zunächst einige „Spielereien“:

f injektif

X: f Y: X: g Y:
1 → a 1 ← a f(1)=a, g(f(1))=g(a)=1, gof(1)=$id_1$=1
2 → b 2 ← b f(2)=b, g(f(2))=g(b)=2, gof(2)=$id_2$=2
3 → c 3 ← c f(3)=c, g(f(3))=g(c)=3, gof(3)=$id_3$=3
d d g(d)=3

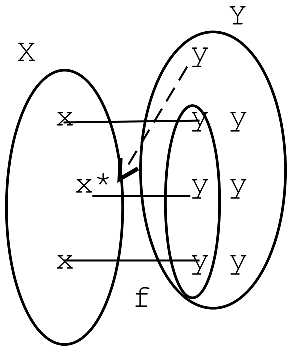
f nicht inf

von b aus ist nur 1 Pfeil möglich, denn g ist Funktion

X: f Y: X: g Y:
1 → a 1 ← a f(1)=a, g(f(1))=g(a)=1, gof=$id_1$=1
2 → b 2 ← b f(2)=b, g(f(2))=g(b)=2, gof=$id_2$=2
3 c 3 ← c f(3)=b, g(f(3))=g(b)=2, gof(3)=2≠$id_3$
d d g(c)und g(d) ändern nichts

$2 \neq 3$, geht der Pfeil statt von b nach 2, von b nach 3,
$f(2)=f(3)$ ändert am Sachverhalt nichts

Bew:„⇒„ Sei f <u>injektiv</u> ⇒ $\forall\, y \in f(X)$ <u>$\exists$ genau ein</u> $x_y \in X: f(x_y)=y$




wähle außerdem noch ein $x^* \in X$ fest
(möglich, da $X \neq \emptyset$) Def $g: Y \to X$,

$$g(y) = \begin{cases} x_y, \text{falls } y = f(x) \\ x^*, \text{falls } y \notin f(X) \text{ d.h. } y \in Y \setminus f(X) \end{cases}$$

Sei $x \in X$ beliebig ⇒ $(g \circ f)(x) = g \circ \underbrace{f(x)}_{=:y \in f(X)} = x$, da
$f(x)=y$, d.h. $x_y = x$ (beachte: $x_y$ ist eindeutig)
$\underbrace{\Rightarrow}_{x\ bel}$ $g(y)=x$ da $f(x)=y$ $\forall\, x \in X$ ⇒
$g \circ f = id_x$.. beachte Def und Wertebereich von
$g \circ f$ und $id_x$ sind gleich

„⇐„:$\exists$ g: $Y \to X$ mit $g \circ f = id_x$ d.h. Z.z:f injektiv,
d.h.z.z. $\forall\, x_1, x_2$ mit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, d.h. genauso auch
$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1)=f(x_2)$ ⇒
$x_1 = id_x(x_1) \underbrace{=}_{Vor} (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) \underbrace{=}_{Vor} id_x(x_2) = x_2$
Sei $x \in X$ bel ⇒ $g \circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{=:y \in f(X)}) = x$, da $f(x)=y$, d.h. $x_y = x$
(beachte das $x_y$ ist eindeutig) $\underbrace{\Rightarrow}_{x\ bel}$ $g \circ f = id_x$
(Beachte: Definitionsbereich und Wertemenge/Zielmenge der beiden f und g sind gleich).

b) f surjektiv ⇔ $\exists$ $h: Y \to X$ mit $f \circ h = id_Y$ (h heißt Rechtsinverses)
Bew:Skizze siehe bei Def für Surjektion
"⇒„ Sei f surjektiv ⇒ $\forall\, y \in Y\ \exists\, x_Y \in X$: $f(x_Y)=y$. Dies ist möglich, da f surjektiv.
Sei ein $x_Y$ fixiert(es gibt viele).
Sei h: $Y \to X$, $h(y) := x_Y$ ⇒ $(f \circ h)(y) = f(x_Y) = y$ ⇒ $f \circ h = id_y$
„⇐„ $\exists$ h: $Y \to X$ mit $f \circ h = id_y$
Z.z.: f surjektiv, d.h. $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X$: $f(x)=y$.
Definiere $h(y)=x_Y$. Sei $y \in Y$ beliebig,
Setze $x := h(y)$ ⇒ $x \in X$ ⇒ $f(x_Y) = f(h(y)) = (f \circ h)(y) = id_y(y) = y$ ⇒ $f \circ h = id_y$
Beachte:Def und Wertebereich von f,h und $id_y$ sind gleich) d.h.
$\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X$: $f(x)=y$

c) f bijektiv ⇔ $\exists$ $g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_x \wedge f \circ g = id_y$.
Dieses g ist, falls vorhanden, eindeutig bestimmt.
//**D0.2.4**(200) Eine Abbildung(Funktion) f: $X \to Y$ heißt
// 3.)bijektiv oder Bijektion: ⇔ f ist injektiv und surjektiv
// Zu jedem $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x)=y$.
// In diesem Fall heißt die Funktion/Abb. $f^{-1}: Y \to X$ definiert durch
// $f^{-1}(y) := x$ für $y=f(x)$ die Umkehrabbildung oder Umkehrfunktion oder
// inverse Funktion zu f, y x, wobei x dasjenige Element aus X

// sei, für das y=f(x) gilt.

Beh(.) f bijektiv $\Leftrightarrow \exists$ g: $Y\to X$ mit $g\circ f=id_x \wedge f\circ g=id_y$

(..) dieses g ist eindeutig

Bew(.):"$\Rightarrow$" 1. Möglichkeit:

Wähle $g=f^{-1}:Y\to X \Rightarrow g\circ f = f^{-1}\circ f=id_x$, $f\circ g = f\circ f^{-1}=id_y$

2. Möglichkeit:

f injektiv $\wedge$ surjektiv $\Rightarrow$

$\exists$ g: $Y\to X$ mit $g\circ f = id_x$ (nach a))

$\wedge$

$\exists$ h: $Y\to X$ mit $f\circ h = id_y$ (nach b). Genügt z.z. h=g.

Dies gilt, da $h=id_x\circ h=(g\circ f)\circ h=g\circ(f\circ h)=g\circ id_y=g$

"$\Leftarrow$" klar nach a), b).

$\exists$ g: $Y\to X$ mit $g\circ f = id_x$ und $f\circ g=id_y$ …

surjektiv $\wedge$ injektiv....bijektiv

Bew(..)Eindeutigkeit von g:

Sei $\tilde{g}:Y\to X$ mit $g\circ f=\tilde{g}\circ f=id_x$, $f\circ g=f\circ\tilde{g}=id_y$

Z.z: $\tilde{g}=g$

Bew: $\tilde{g}=id_x\circ\tilde{g}=(g\circ f)\circ\tilde{g}=g\circ(f\circ\tilde{g})=g\circ id_y=g$

**A0.2.21** Sei $\mathsf{M}\neq\emptyset$ eine Menge von Mengen. Die Relation ~ auf $\mathsf{M}$ sei wie folgt definiert:

* $M_1\sim M_2 :\Leftrightarrow$ es existiert eine bijektive Abbildung f: $M_1\to M_2$

Zeige, dass ~ eine ÄR auf $\mathsf{M}$ ist

*//D0.2.6 (203) Bem:3.)f: $X\to Y$ bijektiv g: $Y\to Z$ bijektiv //*

*// $\Rightarrow$ gof: $X\to Z$ bijektiv und $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$//*

\# Überlegungen:

\# ~ ist nach Definition der Relation eine Teilmenge von Mengen von M.

\# Teilmengen ~ von $\mathsf{M}$ können willkürlich oder mit Vorschriften/Regeln

\# gebildet werden. Hier Regel *: zwischen je 2 Mengen aus $\mathsf{M}$ muss es nach

\# * eine wrd eine bijektive Abb verlangt

\# (gibt es nicht notwendig für alle). Also:

\# Wähle beliebige $M_{ausgewählt}\in\mathsf{M}$. $M_{bij}$: $\exists$ $M_{ausgewählt} \underbrace{\to}_{bij\ Abb} M_{bij} \Rightarrow$

\# $M_{ausgewählt}$ & $M_{bij} \in$ ~

Bew:(.) ~ ist reflexiv, d.h. $M\sim M\ \forall\ M\in\mathsf{M}$, denn $id_M: M\to M$ ist bijektiv.

\# Überlegung: $M_{ausgewählt}\to M_{bij}=M_{ausgewählt}$ ist trivial bijektiv…

\# Regel * erfüllt !

(..) ~ ist symmetrisch, $\forall\ M_1,M_2\in\mathsf{M}$. $M_1\sim M_2 \Rightarrow M_2\sim M_1$

Bew:Sei $M_1\sim M_2 \underbrace{\Rightarrow}_{Def\ \sim} \exists$ bij f: $M_1\to M_2 \Rightarrow f^{-1}: M_2\to M_1$ bijektiv $\underbrace{\Rightarrow}_{Def\ \sim} M_2\sim M_1$

(...)~ ist transitiv, d.h. $\forall\ M_1,M_2,M_3\in\mathsf{M}$: $M_1\sim M_2\sim M_3 \Rightarrow M_1\sim M_3$,

Bew:Sei $M_1\sim M_2$ und $M_2\sim M_3 \Rightarrow \exists$ bijektive f: $M_1\to M_2$, g: $M_2\to M_3$

$\underbrace{\Rightarrow}_{Bem3}$ $g \circ f: M_1 \to M_3$ bijektiv $\Rightarrow M_1 \sim M_3$