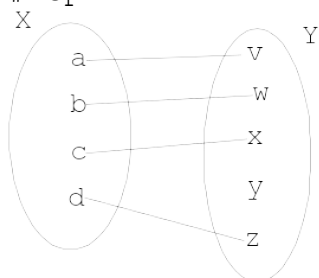


D0.2.4 (200) Eine Abbildung (Funktion) $f: X \rightarrow Y$ heißt

- 1.) injektiv (eindeutig) oder Injektion: $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, d.h. jedes $y \in Y$ hat max 1 Urbild $x \in X$ mit $y = f(x)$, d.h. aus $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

#Bsp



Wertebereich Y kann auch "zu groß" gewählt sein

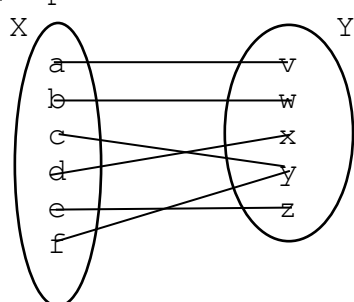
f , d.h. für alle x Element von X existiert genau ein y

- 2.) surjektiv (Surjektion) (Abb von X auf Y): $\Leftrightarrow Y = f(X)$,

(d.h. für $\forall y \in Y \exists$ mindestens ein $x \in X: y = f(x)$),

d.h. Wertebereich nicht zu groß gewählt

#Bsp



auch hier: f , d.h. $\forall x \in X \exists_1 y$

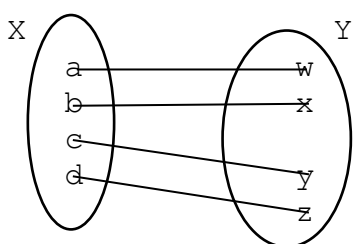
- 3.) bijektiv oder Bijektion: $\Leftrightarrow f$ ist injektiv und surjektiv

Zu jedem $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

In diesem Fall heißt die Funktion/Abb. $f^{-1}: Y \rightarrow X$ definiert durch $f^{-1}(y) := x$ für $y = f(x)$ die Umkehrabbildung oder Umkehrfunktion oder inverse Funktion zu f , $y \rightarrow x$, wobei x dasjenige Element aus X sei, für das $y = f(x)$ gilt.

Eine Bijektion $f: X \rightarrow X$ heißt Permutation von X

#Bsp



f , d.h. jedem $x \in X$ ist genau ein $y \in Y$ zu geordnet, $\forall y \in Y$ auf Grund der Eigenschaft surjektiv.

Bem: 1.) Falls f nicht bijektiv, so existiert keine Umkehrfunktion auf Y

- 2.) Achtung: $f^{-1}(B)$ Urbild ist verschieden von $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion

Bsp: 1.) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ mit $f(z) = z^2$ ist weder injektiv

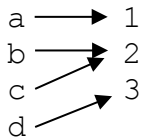
(denn $f(-z) = (-z)^2 = f(z) \quad \forall z \in \mathbf{Z}$) noch surjektiv

(denn z.B. hat 3 kein Urbild, $\#z^2 = 3: z \notin \mathbf{Z}$)

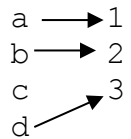
- 2.) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ (= \{r \in \mathbf{R} \mid r \geq 0\})$, die jeder Zahl ihren absoluten Betrag zuordnet, ist nicht injektiv, aber surjektiv.

- 3.) Abb der Menge $\{1, 2, 3\}$ in sich mit $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$ ist sowohl injektiv als auch surjektiv, also bijektiv.

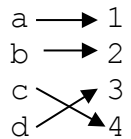
4.) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ bzw. $B = \{1, 2, 3, 4\}$



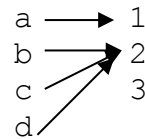
surjektiv
 $f(\{a\}) = \{1\}$
 $f(\{a, b\}) = \{1, 2\}$
 $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{a, b, c\}$ von c
 $f^{-1}(B) = A$



keine Funktion
 kein Bild



bijektiv



$f(A) = \{1, 2\} \neq B$

L0.2.1 (201) Vor: X endliche Menge. $f: X \rightarrow X$ eine Abbildung
 Aussage: a) f injektiv b) f surjektiv c) f bijektiv sind äquivalent.

Bew: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) \Rightarrow b): f injektiv $\Rightarrow \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \subset X$ hat n Elemente \Rightarrow
 $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} = X \Rightarrow f$ surjektiv

b) \Rightarrow c): f surjektiv $\Rightarrow \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ hat n Elemente $\stackrel{a)b)}{\Rightarrow}$
 die n Elemente müssen verschieden sein $\Rightarrow f$ injektiv $\stackrel{a)}{\Rightarrow}$
 f bijektiv

c) \Rightarrow a): c): f bij. $\Rightarrow f$ inj

S0.2.2 (201)

Es sei eine bijektive Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit Umkehrfunktion

$f^{-1}: Y \rightarrow X$ gegeben, dann gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y$$

Bew: Sei $x \in X$ baf. Setze $y = f(x)$, d.h. nach Def ist $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$

Sei $y \in Y$ baf. $\stackrel{f \text{ bij}}{\Rightarrow} \exists x \in X$ mit $f(x) = y$, d.h. $x = f^{-1}(y)$, $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$

A0.2.9 Gegeben sei die Funktion $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 3, 5, 7\}$ mit

$$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 7, f(4) = 7, f(5) = 5.$$

Bestimme $f(\{1, 2, 3\})$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{5\})$, $f^{-1}(\{5, 7\})$

Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

Ist $f|_{\{1, 2, 3\}}$ injektiv, surjektiv, bijektiv?

Lös: $f(\{1, 2, 3\}) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{1, 3, 7\}$,

$$f^{-1}(\{3\}) = \{x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \mid f(x) = 3\} = \{2\},$$

$$f^{-1}(\{5\}) = \{x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \mid f(x) = 5\} = \{5\}$$

$$f^{-1}(\{5, 7\}) = \{x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \mid f(x) \in \{5, 7\}\} = \{5, 3, 4\}$$

f injektiv? $\exists x_1, x_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit $x_1 \neq x_2: 3 \neq 4$ mit $f(x_1) = f(x_2)$:
 $f(3) = 7, f(4) = 7, f(3) = f(4) = 7 \Rightarrow f$ nicht injektiv

f surjektiv? Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, Y = \{1, 3, 5, 7\}$

$\forall y \in Y = \{1, 3, 5, 7\} \exists$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$:

$$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 7, f(4) = 7, f(5) = 5$$

f ist surjektiv (für $y = 7$ existieren sogar 2 Elemente aus X mit $f(x) = y$)

f bijektiv? Nein, da f nicht injektiv ($f(3) = f(4)$).

$f|_{\{1, 2, 3\}}$ injektiv? $X' = \{1, 2, 3\}, f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 7$,

$Y = \{1, 3, 5, 7\} \forall x_1, x_2 \in X'$ und $x_1 \neq x_2: f(x_1) \neq f(x_2)$ Ja!

$f|_{\{1, 2, 3\}}$ surjektiv? $Y = f(X')$, $f(x) \neq 5$ für $x \in \{1, 2, 3\}$ Nein!

$f|_{\{1, 2, 3\}}$ bijektiv? $f|_{\{1, 2, 3\}}$ ist injektiv und nicht surjektiv \Rightarrow Nein!

A0.2.10 Gebe an/zeige: Eine Abbildung f von X nach Y ist genau dann injektiv/nicht injektiv, wenn gilt:

a) $x, x' \in X$ und $x \neq x'$ folgt $f(x) \neq f(x')$

Lös:injektiv

- b) Gibt es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x)=y$ so ist f injektiv
c) Gibt es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $f(x)=y$, so ist f trotzdem nicht injektiv.
d) Wenn für $x, x' \in X$ mit $f(x)=f(x')$, $x=x'$ ist, so ist f injektiv
e) Gibt es eine surjektive $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$?

$$\text{Lös: } f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0,1) \\ 0, & \text{falls } x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ja}$$

A0.2.11 Welche der folgenden Abbildungen von \mathbb{R} in sich sind injektiv, welche sind surjektiv?

$$f(x)=x^3, f(x)=ax^2+bx+c \ (a \neq 0), f(x)=|x|, f(x)=e^x.$$

A0.2.12 Gegeben sei eine Menge $M \neq \emptyset$ und deren Potenzmenge $\mathbf{P}(M)$.

a) Bestimme eine injektive Abbildung $f: M \rightarrow \mathbf{P}(M)$.

Lös: Bsp $f: M \rightarrow \mathbf{P}(M)$. $f(x) = \{x\}$. Dann ist f injektiv, denn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $\{x_1\} = \{x_2\} \Rightarrow x_1 = x_2$

b) Beweise, dass es keine surjektive Abbildung $g: M \rightarrow \mathbf{P}(M)$ geben kann.
Hinweis: Betrachte die Menge $A = \{x \in M \mid x \neq g(x)\}$

Bew: Annahme: Es existiert eine solche Abb $g: M \rightarrow \mathbf{P}(M)$ surjektiv.

Sei $A = \{x \in M \mid x \neq g(x)\}$. Da g surjektiv $\exists x_0 \in M$ mit $g(x_0) \in A$,
#d.h. $x_0 \neq g(x_0)$ # da $\mathbf{P}(M)$ außer allen $x \in M$ noch weitere Elemente enthält und diese wegen Surjektivität einen Partner in M haben müssen. Dann ist $x_0 \in A$ oder $x_0 \notin A$.

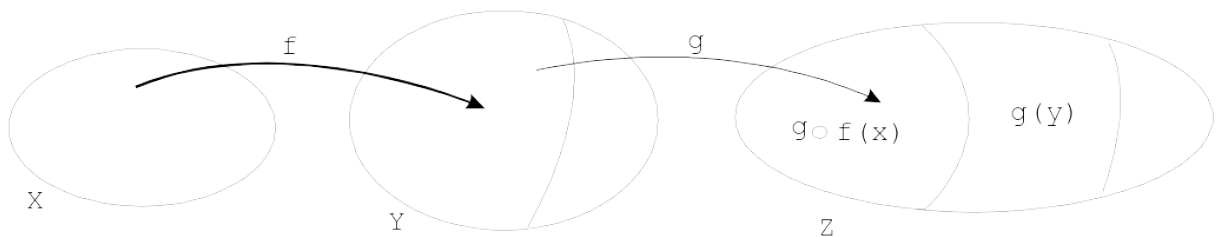
Wenn $x_0 \in A$, dann heißt das $x_0 \neq g(x_0) \in A$.

Wenn $x_0 \notin A$, dann heißt das $x_0 = g(x_0) \in A \Rightarrow$ Widerspruch

Annahme einer surjektiven Funktion $g: M \rightarrow \mathbf{P}(M)$ muss also falsch gewesen sein. (...auch für ∞ große $\mathbf{P}(M)$ richtig)

D0.2.5 (202) Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ vorgegeben, dann heißt die Abb. $g \circ f: X \rightarrow Z$ definiert durch $x \mapsto g(f(x)) \ \forall x \in X$ die zusammengesetzte oder verkettete Funktion aus f und g (Komposition von f mit g)

Bsp:



Bem: 1.) Die Komposition ist assoziativ, aber nicht kommutativ:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Bew: Sei $h: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, f: Z \rightarrow W, x \in X$.

$$\begin{aligned} f \circ (g \circ h)(x) &= \underbrace{f(g(h(x)))}_{D0.2.5} = \underbrace{f(g(h(x)))}_{D0.2.5} = \underbrace{f(g(h(x)))}_{D0.2.5} = \underbrace{f(g(h(x)))}_{D0.2.5} \\ &= (f \circ g)(h(x)) \end{aligned}$$

2.) Sind $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ bijektive Abb, dann ist auch $g \circ f: X \rightarrow Z$ bijektiv und die Umkehrfunktion $(g \circ f)^{-1}: Z \rightarrow X$ ist gegeben durch $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

A0.2.13 Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Funktionen. Zeige:

- a) f surjektiv, $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow g$ injektiv
- b) g injektiv, $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow f$ surjektiv
- c) Aus $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv
- d) Aus $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv
- e) Sind f und g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv

Bew: $g: X \rightarrow Y, f: Y \rightarrow Z, x, x' \in X, f(g(x)) = f(g(x'))$; Zu zeigen $x = x'$

$$\begin{aligned} f(\underbrace{g(x)}_y) = f \circ g(x) &= \underbrace{f \circ g(x')}_{g \text{ injektiv}} = f(\underbrace{g(x')}_{y'}) \Rightarrow f(y) = f(y') \xRightarrow{f \text{ injektiv}} y = y' \Rightarrow \\ g(x) = g(x') &= \underbrace{x = x'}_{g \text{ injektiv}} \end{aligned}$$

f) Sind f und g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv

Bew: $z \in Z. \exists y \in Y: f(y) = z$. Da g surjektiv $\exists x \in X: g(x) = y \xRightarrow{g \text{ surjektiv}} y \xRightarrow{f \text{ surjektiv}}$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(y) = z \Rightarrow f \circ g \text{ surjektiv}$$

g) Folgere aus c) und d): f, g bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv und zeige, dass dann $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

D0.2.6 (203) Seien X, Y beliebige Mengen $\neq \emptyset$ und $A \subset X$ und Funktionen gegeben

$f: X \rightarrow Y, g: A \rightarrow Y$, dann heißt

- 1.) $\text{id}_x: X \rightarrow X$ mit $x = x \forall x \in X$ die Identität auf X oder identische Abb. auf X
- 2.) g die Restriktion (oder Einschränkung) von f auf $A: \Leftrightarrow g(x) = f(x) \forall x \in A. \text{ Bez: } g = f|_A$
- 3.) f eine Fortsetzung von g von A auf $X: \Leftrightarrow g = f|_A$ von A auf X
- 4.) Wenn eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ bijektiv, dann gilt $f^{-1} \circ f = \text{id}_x$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_y$

Bem: 1.) id_X ist bijektiv und $\text{id}_X^{-1} = \text{id}_X$

2.) $f: X \rightarrow Y$ ist injektiv $\Leftrightarrow f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) \quad \forall A, B \subset X$

// (107) **Eigenschaften von Bild und Urbild einer Funktion f** //

// b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \subset X$ //

Bew: " \Rightarrow " Stets gilt $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Sei $X \rightarrow Y$ injektiv und $y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow$

$y = f(x_1) = f(x_2)$ mit $x_1 \in A, x_2 \in B \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$

$x_1 \in A \cap B \Rightarrow y \in f(A \cap B) \Rightarrow f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B) \Rightarrow$

$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$

" \Leftarrow " Annahme: Sei $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \subset X$ und

$f(x_1) = f(x_2) = y, A = \{x_1\}, B = \{x_2\}$

$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow A \cap B = \emptyset, f(A \cap B) = \emptyset.$

Andererseits ist $f(A) = f(B) = \{y\}$ und damit $f(A) \cap f(B) = \{y\} \neq \emptyset \Rightarrow$

Widerspruch \Rightarrow Annahme falsch \Rightarrow

$x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f: X \rightarrow Y$ ist injektiv

3.) $f: X \rightarrow Y$ bijektiv $g: Y \rightarrow Z$ bijektiv \Rightarrow

$g \circ f: X \rightarrow Z$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Bew: $f(X) = Y, g(Y) = Z \Rightarrow (g \circ f)(X) = Z$ surjektiv

↑ Wähle $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(\underset{Y_1}{f(x_1)}) = g(\underset{Y_2}{f(x_2)}) \Rightarrow$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow g \circ f$ bijektiv

$y = f(x), z = g(y) = (g \circ f)(x) \Rightarrow$

$x = f^{-1}(y), y = g^{-1}(z) \Rightarrow x = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z) \quad \forall z \in Z$

$\Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Andere Formulierung:

// D0.2.6 (203) $X, Y \neq \emptyset$ & $A \subset X$ & $f: X \rightarrow Y$ $g: A \rightarrow Y$ //

1.) $\text{id}_X: X \rightarrow X$ mit $x = x \quad \forall x \in X$

Bew: z.z.: $g \circ f$ ist bijektiv mit Umkehrfunktion $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Definiere $F = (g \circ f)$ und $G = f^{-1} \circ g^{-1}$ dann ist z.z., dass F

bijektiv mit Umkehrabb G . $F: X \rightarrow Z, G: Z \rightarrow X$.

$F(X) = g \circ f(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$, d.h. F ist surjektiv

Andererseits gilt für $x \in X$

$G(F(x)) = G(g \circ f(x)) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x$, d.h.

$G \circ F = \text{id}_X \stackrel{1)}{\Rightarrow} F$ ist injektiv # müsste das nicht bewiesen werden?

Also ist F bijektiv mit Umkehrabb $F^{-1}: Z \rightarrow X$, wobei $F(x) = z \Leftrightarrow x = F^{-1}(z)$. Beachte, dass gilt $G(z) = G(F(x)) = x = F^{-1}(z)$

A0.2.14 Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Funktionen. Zeige:

a) f surjektiv $\Leftrightarrow \exists g: Y \rightarrow X$ mit $f \circ g = \text{id}_Y$

Lös: " \Leftarrow " $y = \text{id}_Y(y) = (f \circ g)(y) = f(\underbrace{g(y)}_x) = f(x) \Rightarrow$ d.h. alle Elemente von Y

werden von y erreicht, f ist surjektiv

" \Rightarrow " definiere $g: Y \rightarrow X, g(y) = x$ (wobei $f(x) = y$) d.h. zu jedem y

finde ich mindestens ein x da surjektiv.

$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = \text{id}_Y$

A0.2.15 Geg sei eine nichtleere Menge X und 2 Funktionen

$f, g: X \rightarrow X$. Beweise oder widerlege: Es gilt stets $f \circ g = g \circ f$

Lös: # Wertebereich muss nicht gleich X sein

$f \circ g \neq g \circ f$: Setze z.B.: $X = \{0, 1\}$ und definiere

$f: X \rightarrow X$ durch $f(0)=f(1)=0$ und $g: X \rightarrow X$ durch $g(0)=g(1)=1 \Rightarrow$
 $f(g(0))=f(g(1))=f(1)=0$ und $g(f(0))=g(f(1))=g(0)=1 \Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$

A0.2.16

a) Es sei eine Funktion $f: A \rightarrow B$ gegeben. $A_1 \subset A, B_1 \subset B$.

Beweis: $f^{-1}(f(A_1)) \supset A_1$

Lös: Sei $x \in A_1$. Def $y=f(x)$ und $B_1=f(A_1) \Rightarrow y \in B_1 \Rightarrow f^{-1}(B_1) = \{z \in A \mid f(z) \in B_1\}$
 $\Rightarrow x$ erfüllt die Bedingung $f(z) \in B_1$, denn $f(x)=y \in B_1 \Rightarrow$

$$x \in f^{-1}(B_1) = f^{-1}(f(A_1))$$

$f^{-1}(f(A))=A$ gilt im Allgemeinen nicht. Gegenbeispiel siehe b)

#Lös: $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

Sei $x \in A_1$ baf $\Rightarrow y \in f(A_1)$ mit $f(x)=y \Rightarrow$

$\exists x \in A_1: f^{-1}(y)=x$ oder $(\exists x' \in A \setminus A_1: f^{-1}(y)=x')$ und $\exists x \in A_1: f^{-1}(y)=x$

$\Rightarrow x \in A_1$ und $x \in f^{-1}(f(A_1)) \Rightarrow A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

b) Es seien X, Y Mengen $\neq \emptyset$ und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

Zeige für $A \subset X, B \subset Y: f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}, f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

$f(f^{-1}(B))=B$ gilt im allgemeinen nicht. Gegenbeispiel

Bew: Sei $X=\{x_1, x_2\}, Y=\{y_1, y_2\}$, mit $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ und $f: X \rightarrow Y$ definiert durch $f(x_1)=f(x_2)=y_1$ (d.h. $f(X)=y_1$).

Gegenbeispiel:

Weiter sei $A=\{x_1\}$ und $B=Y=\{y_1, y_2\} \Rightarrow$

$$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y_1\}) = \{x_1, x_2\} = X \neq A \text{ und } f(f^{-1}(B)) = f(\underbrace{\{x_1, x_2\}}_{=X}) = \{y_1\} \neq B$$

Bem: (.) $f^{-1}(f(A))=A \quad \forall A \subset X \Leftrightarrow f$ injektiv

(..) $f(f^{-1}(B))=B \quad \forall B \subset Y \Leftrightarrow f$ surjektiv

c) f ist injektiv $\Leftrightarrow f(\bigcap_{M \in S} M) = \bigcap_{M \in S} f(M) \quad \forall S \subset \mathcal{P}(X), S \neq \emptyset$

// D0.2.6 Bem: 2.) (203) $f: X \rightarrow Y$ ist injektiv $\Leftrightarrow f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) \quad \forall A, B \subset X$ //

// (107) Eigenschaften von Bild und Urbild einer Funktion f //

// b) $f(\bigcap_{M \in S} M) \subset \bigcap_{M \in S} f(M), M \subset X$ //

Bew: " \Leftarrow " folgt aus D0.2.6 Bem 2 mit $S=\{A, B\}$ für beliebige $A, B \subset X$

$$(f(A) \cap f(B)) = \bigcap_{M \in S} f(M) = f(\bigcap_{M \in S} M) = f(A \cap B)$$

" \Rightarrow " Sei f injektiv. Sei $S \subset \mathcal{P}(X), S \neq \emptyset$ bel.

$f(\bigcap_{M \in S} M) \subset \bigcap_{M \in S} f(M)$. Noch z.z. $f(\bigcap_{M \in S} M) \supset \bigcap_{M \in S} f(M)$ wie folgt

$$y \in \bigcap_{M \in S} f(M) \stackrel{\text{Def } \cap}{\Leftrightarrow} y \in f(M) \quad \forall M \in S \text{ (besser: } \forall M \in S: y \in f(M)) \stackrel{\text{Def Bild}}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall M \in S \exists x_M \in M \text{ mit } y=f(x_M) \stackrel{f \text{ injektiv}}{\Leftrightarrow}$$

$\forall M \in S \exists x \in M$ mit $y=f(x)$ und zwar dasselbe $x \quad \forall M \in S \quad x_{M_1}$

" \Leftarrow " klar

$$" \Rightarrow " f(x_{M_1}) = f(x_{M_2}) \stackrel{f \text{ injektiv}}{\Leftrightarrow} x_{M_1} = x_{M_2}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in \bigcap_{M \in S} M \text{ mit } y=f(x) \Leftrightarrow y \in f(\bigcap_{M \in S} M)$$

Bem: Es wurde sogar $\bigcap_{M \in S} f(M) = f(\bigcap_{M \in S} M)$ bewiesen

A0.2.17 $f: X \rightarrow Y$. Zeige daß immer gilt $f \circ id_X = f$ und $id_Y \circ f = f$

A0.2.18 $f: X \rightarrow Y$ bij und f^{-1} die Umkehrfkt.

Zeige $f \circ f^{-1} = id_Y, f^{-1} \circ f = id_X$

A0.2.19 Sei angenommen, daß eine Funktion $g: Y \rightarrow X$ existiert, sodaß $f \circ g = id_Y, g \circ f = id_X$. Zeige, daß dann f bijektiv und $g=f^{-1}$ ist.

Was kann man schließen, wenn nur $f \circ g = \text{id}_Y$ oder $g \circ f = \text{id}_X$ gilt?

S0.2.3 (206)

Vor: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine bijektive Funktion mit Umkehrfunktion $f^{-1}: Y \rightarrow X$

Beh: $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ oder

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in X \quad \text{und} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in Y$$

$$\text{d.h. } f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y$$

Bew: 1.) Sei x beliebig mit $x \in X$ und setze $y := f(x)$ (bij) $\Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$$\Rightarrow x = f^{-1}(f(x)), \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_X$$

$$\text{Analog sei } y \in Y, \text{ Setze } x = f^{-1}(y) \Rightarrow y = f(x) = f(f^{-1}(y))$$

$$\text{d.h. } f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$$

S0.2.4 (206)

a) Sei $f: X \rightarrow Y$ umkehrbar (invertierbar), dann ist die inverse Abbildung g eindeutig bestimmt.

Bew: $h, g: X \rightarrow Y$ inverse Abbildungen, zu zeigen $h = g$

$$g = g \circ I_{d_Y} = g \circ (f \circ h) \stackrel{D0.2.5 \text{ Bem 1}}{=} (g \circ f) \circ h = I_{d_X} \circ h = h \Rightarrow g = h$$

$$\text{Nebenrechnung.. } g \circ I_{d_Y} = g \dots \text{ Sei } y \in Y \Rightarrow g \circ I_{d_Y}(y) = g(I_{d_Y}(y)) = g(y)$$

$$\text{Analog.. } I_{d_X} \circ h = h$$

b) $f: X \rightarrow Y$ ist invers (umkehrbar) $\Leftrightarrow f$ ist bijektiv

Bew: " \Rightarrow " f invertierbar, zu zeigen f injektiv + surjektiv

Sei g die inverse Abb auf X .

- Injektiv... Sei $x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x') = x'$
- Surjektiv... $y \in Y$, setze $x = g(y) \in X \Rightarrow f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = y \Rightarrow f$ surj.

" \Leftarrow " f bijektiv, zu zeigen f invertierbar.

$$\text{Sei } y \in Y \stackrel{f \text{ surjektiv}}{\Rightarrow} \exists \text{ Urbild zu } y \text{ d.h. } x \in X \text{ mit } f(x) = y \stackrel{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow}$$

$\exists!$ solches x , benannt $g(y)$. So definieren wir eine Abb $g: Y \rightarrow X$, zu zeigen g ist invers zu f :

$$f: X \rightarrow Y \text{ ist invertierbar} \Leftrightarrow \exists g: Y \rightarrow X, \quad g \circ f = I_{d_X}, \quad f \circ g = I_{d_Y}$$

$$\text{Sei } x \in X, \quad f(\underbrace{g(f(x))}_{x'}) = f(x') \stackrel{a) f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} x = x' \Rightarrow x = g(f(x)) = g \circ f(x) \stackrel{x \text{ beliebig}}{\Rightarrow}$$

$$g \circ f = I_{d_X}$$

Umgekehrt $f(g(y)) = y$ gilt nach Konstruktion $\forall y \in Y$, also

$$f \circ g = I_{d_Y}$$

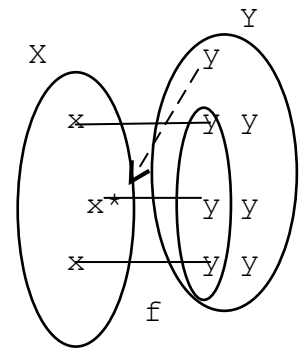
A0.2.20

Es seien X, Y Mengen $\neq \emptyset$ und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeige:

a) f ist genau dann injektiv, falls es eine Abbildung

$g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ gibt

Bew: „ \Rightarrow “ Sei f injektiv $\Rightarrow \forall y \in f(X) \exists$ genau ein $x_y \in X: f(x_y) = y$



wähle außerdem noch ein $x^* \in X$ fest (möglich, da $X \neq \emptyset$) Def $g: Y \rightarrow X$,

$$g(y) = \begin{cases} x_y, & \text{falls } y = f(x) \\ x^*, & \text{falls } y \notin f(X) \text{ d.h. } y \in Y \setminus f(X) \end{cases}$$

Sei $x \in X$ beliebig $\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$, da $f(x) = y$, d.h. $x_y = x$ (beachte: x_y ist

eindeutig) $\Rightarrow_{x \text{ bel}} g(y) = x$ da $f(x) = y \forall x \in X \Rightarrow$

$g \circ f = \text{id}_X$.. beachte Def und Wertebereich von

$g \circ f$ und id_X sind gleich

„ \Leftarrow “: $\exists g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ d.h. Z.z.: f injektiv,

d.h. z.z. $\forall x_1, x_2$ mit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, d.h. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$$x_1 = \text{id}_X(x_1) \stackrel{=}{=}_{\text{Vor}} (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) \stackrel{=}{=}_{\text{Vor}} \text{id}_X(x_2) = x_2$$

Sei $x \in X$ bel, $\Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = x$, da $f(x) = y$, d.h. $x_y = x$

(beachte das x_y ist eindeutig) $\Rightarrow_{x \text{ bel}} g \circ f = \text{id}_X$

(Beachte: Definitionsbereich und Wertemenge/Zielmenge der beiden Funktionen sind gleich).

b) f ist genau dann surjektiv, falls es eine Abbildung $h:$

$Y \rightarrow X$ mit $f \circ h = \text{id}_Y$ gibt.

Beh: f surjektiv $\Leftrightarrow \exists h: Y \rightarrow X$ mit $f \circ h = \text{id}_Y$ (h heißt Rechtsinverses)

Bew: Skizze siehe bei Def für Surjektion

„ \Rightarrow “ Sei f surjektiv $\Rightarrow \forall y \in Y \exists x_y \in X: f(x_y) = y$. Dies ist möglich, da f surjektiv. Sei ein x_y fixiert (es gibt

viele). Sei $h: Y \rightarrow X, h(y) := x_y \Rightarrow (f \circ h)(y) = f(x_y) = y \Rightarrow f \circ h = \text{id}_Y$

„ \Leftarrow “ $\exists h: Y \rightarrow X$ mit $f \circ h = \text{id}_Y$

Z.z.: f surjektiv, d.h. $\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$.

Definiere $h(y) = x_y$. Sei $y \in Y$ beliebig,

Setze $x := h(y) \Rightarrow x \in X \Rightarrow f(x) = f(h(y)) = (f \circ h)(y) = \text{id}_Y(y) = y \Rightarrow f \circ h = \text{id}_Y$

Beachte: Def und Wertebereich von f, h und id_Y sind gleich) d.h.

$$\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$$

c) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$ gibt. Dieses g ist, falls vorhanden, eindeutig bestimmt.

Beh.(.) f bijektiv $\Leftrightarrow \exists g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ $f \circ g = \text{id}_Y$

(..) dieses g ist eindeutig

($g = f^{-1}$ siehe später, heißt inverse Funktion)

Bew.(.) " \Rightarrow " 1. Möglichkeit: Wähle $g = f^{-1}: Y \rightarrow X \Rightarrow$

$$g \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_X, f \circ g = f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$$

2. Möglichkeit: Da f injektiv und surjektiv ist,

$\exists g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ (nach a)) und

$\exists h: Y \rightarrow X$ mit $f \circ h = \text{id}_Y$ (nach b)). Genügt z.z. $h = g$.

Dies gilt, da $h = \text{id}_X \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ \text{id}_Y = g$

" \Leftarrow " klar nach a), b). $\exists g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ und

$f \circ g = \text{id}_Y$...surjektiv+ injektiv....bijektiv

Bew(..) Eindeutigkeit von g :

Sei $\tilde{g}: Y \rightarrow X$ mit $\tilde{g} \circ f = \text{id}_X, f \circ \tilde{g} = \text{id}_Y$

Z.z: $\tilde{g} = g$

$$\text{Bew: } \tilde{g} = \text{id}_X \circ \tilde{g} = (g \circ f) \circ \tilde{g} = g \circ (f \circ \tilde{g}) = g \circ \text{id}_Y = g$$

A0.2.21 Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge von Mengen. Die Relation \sim auf M sei wie folgt definiert:

$M_1 \sim M_2 : \Leftrightarrow$ es existiert eine bijektive Abbildung $f: M_1 \rightarrow M_2$

Zeige, daß \sim eine ÄR auf M ist

//D0.2.6 (203) Bem:3.) $f: X \rightarrow Y$ bijektiv $g: Y \rightarrow Z$ bijektiv //

// $\Rightarrow g \circ f: X \rightarrow Z$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ //

Bew:(.) \sim ist reflexiv, d.h. $M \sim M \forall M \in M$, denn $\text{id}_M: M \rightarrow M$ ist bijektiv.

(..) \sim ist symmetrisch, $\forall M_1, M_2 \in M. M_1 \sim M_2 \Rightarrow M_2 \sim M_1$

Bew: Sei $M_1 \sim M_2 \xrightarrow[\text{Def } \sim]{\Leftrightarrow} \exists \text{ bij } f: M_1 \rightarrow M_2 \Rightarrow f^{-1}: M_2 \rightarrow M_1 \text{ bijektiv} \xrightarrow[\text{Def } \sim]{\Leftrightarrow} M_2 \sim M_1$

(...) \sim ist transitiv, d.h. $\forall M_1, M_2, M_3 \in M: M_1 \sim M_2 \sim M_3 \Rightarrow M_1 \sim M_3$,

Bew: Sei $M_1 \sim M_2$ und $M_2 \sim M_3 \Rightarrow \exists$ bijektive $f: M_1 \rightarrow M_2, g: M_2 \rightarrow M_3$

\Rightarrow
Bem3 $g \circ f: M_1 \rightarrow M_3$ bijektiv $\Rightarrow M_1 \sim M_3$