**A1.9.9** (Minkowski-Ungleichung) Zeige, dass für $a_1,...,a_n,b_1,..., b_n\in\mathbb{C}$ gilt:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2}$$

Bew:Es gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k+b_k||a_k| + \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k+b_k||b_k| \underbrace{\le}_{CauchySchwarz}$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2\sqrt{|a_k+b_k|^2}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2}} =$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2}$$ Beh, wenn

$\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2} > 0$ (Bei =0 Beh offensichtlich)

**A1.9.10** Seien $x_k$ und $p_k$ wie oben, und sei P das zughörige Interpolationspolynom. Zeige: Es gibt eindeutig bestimmte Zahlen $b_k\in\mathbb{K}$ so, daß für alle $x\in\mathbb{K}$ gilt $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} b_k \prod\limits_{j=0}^{k-1} (x-x_j)$, wobei die übliche Konvention zu beachten ist, daß ein leeres Produkt den Wert 1 haben soll. Diskutiere insbesondere, wieweit sich die $b_k$ (nicht) ändern, wenn man eine weitere Stützstelle hinzunimmt. Diese Darstellung heißt Newtonsche Darstellung des Interpolationspolynoms.

Lösung:

$p_0=P(x_0)=\sum\limits_{k=0}^{¥} b_k \prod\limits_{j=0}^{k-1} (x-x_j) = b_0 \prod\limits_{j=0}^{0-1} (x_0-x_0) = b_0$

$p_1=P(x_1)=b_0+b_1(x_1-x_0) \Rightarrow \dfrac{p_1-p_0}{x_1-x_0} = b_1$

$p_\mu=\sum\limits_{k=0}^{\mu} b_k \prod\limits_{j=1}^{\mu-1} (x_\mu-x_k) = b_\mu \prod\limits_{j=1}^{\mu-1} (x_\mu-x_j)+\ldots$

**A1.9.11** Berechne das Interpolationspolynom zu den Daten $x_0=0$, $x_1=-1$, $x_2=2$, sowie $p_0=1$, $p_1=2$, $p_2=1$.

Lös: $P(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)(x-x_1)$

$p_0=P(x_0)=P(0)=1=b_0+b_1(\underbrace{\underbrace{0}_{x}-\underbrace{0}_{x_0}}_{0})+b_2*0 \Rightarrow b_0=1$

$p_1=P(x_1)=P(-1)=2=\underbrace{1}_{b_0}+b_1(\underbrace{-1}_{x}-\underbrace{0}_{x_0})+b_2(-1-0)(-1-(-1)) \Rightarrow 2=1-b_1 \Rightarrow b_1=-1$

$p_2=1=P(2)=1-(2-0)b_2(2-0)(2-(-1)) \Rightarrow 1=-1+6b_2, b_2=1/3$

**A1.9.12** Finde das Interpolationspolynom vom Grade $\leq 3$ zu den Stützstellen $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$ und den Werten $P_0=P_1=0$, $P_2=P_3=1$

Lös: $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2$

$a_0+a_10+a_20+a_30=0 \Rightarrow a_0=0$

$\Rightarrow a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

$a_1+a_2+a_3=0$ $\quad$ $2a_2=1$, $a_2=1/2$, $a_1+1/2+a_3=0$

$-a_1+a_2-a_3=1$ $\quad$ $2a_1+2+8a_3=1$

$2a_1+4a_2+8a_3=1$ $\quad$ $2a_1+1+2a_3=0$

$a_1=-1/2+1/6=-1/3$ $\quad$ $1+6a_3=1$, $a_3=0$

Andere Formulierung

$$P(x)=\sum_{k=0}^{3} p_kL_k(x)$$

$$L_2(x)=\prod_{j=2}\frac{x-x_j}{x_2-x_j}=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_3(x)=\prod_{j=3}\frac{x-x_j}{x_3-x_j}=\frac{x^3-x}{6}$$

$$P(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}+\frac{x^3-x}{6}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$$

**A1.9.13** Bestimme die Nullstellen der Polynome $P(x)$ als Elemente von $\mathbb{R}[x]$ bzw $\mathbb{C}[x]$:

a) $P(x)=x^4-2x^3-5x^2+6x$

Lös: Nullstellen bei 0 und 1....$=x(x-1)(x^2-x-6)=$
$x(x-1)(x-3)(x+2)$

4 reelle Nullstellen. Gleiche Nullstellen in $\mathbb{C}[x]$.

b) $P(x)=x^4-3x^3+3x^2+x-6$

Lös:…Nullstellen $-1,2$. …$=(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=$
$(x+1)(x-2)(x-1)^2+2$...2reelle Nullstellen, in $\mathbb{C}$ 2 weitere komplexe Nullstellen. $x_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{12-4}}{2}=1+i\sqrt{2}$, $1-i\sqrt{2}$