

A1.9.1 Gegeben sei ein Polynom $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ mit $c_n \neq 0$.

Es sei $a \in \mathbf{R}$ eine Nullstelle von f , d.h. es gelte $f(a) = 0$.

Beweise, dass $|a| < \frac{1}{|c_n|} \sum_{k=0}^n |c_k|$.

Bew: $|a| < 1$: $|a| < 1 \leq \frac{|c_0| + |c_1| + \dots + |c_n|}{|c_n|} = \frac{1}{|c_n|} \sum_{k=0}^n |c_k|$.

$\frac{|c_0| + |c_1| + \dots + |c_n|}{|c_n|} = \frac{1}{|c_n|} \sum_{k=0}^n |c_k| \geq 1 \stackrel{|a| < 1}{\Rightarrow}$ weiter wie oben

$|a| \geq 1$: $f(a) = 0 \Rightarrow c_0 + c_1 a + \dots + c_{n-1} a^{n-1} + c_n a^n = 0 \Rightarrow$

$$c_n a^n = -c_0 - c_1 a - \dots - c_{n-1} a^{n-1} = - \sum_{k=0}^{n-1} c_k a^k \Rightarrow$$

$$|c_n| |a|^n = \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k a^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| |a|^k \Rightarrow$$

$$|c_n| |a|^n * \frac{1}{|c_n| |a|^{n-1}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| |a|^k * \frac{1}{|c_n| |a|^{n-1}} \Rightarrow$$

$$|a| \leq \frac{1}{|c_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| |a|^{k-(n-1)} \stackrel{|a| \geq 1, k-(n-1) \leq 0}{\geq} \frac{1}{|c_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| < \frac{1}{|c_n|} \sum_{k=0}^n |c_k|$$

A1.9.2

a) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{C}$ mit $a_n, b_m \neq 0$. Zeige, dass

für die Polynome $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ und $Q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$ gilt:

$P \cdot Q$ ist ein Polynom vom Grad $n+m$, genauer:

$P(z) \cdot Q(z) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k$ mit $c_k = \sum_{\nu+\mu=k} a_\nu b_\mu$, $k=0, \dots, n+m$, wobei

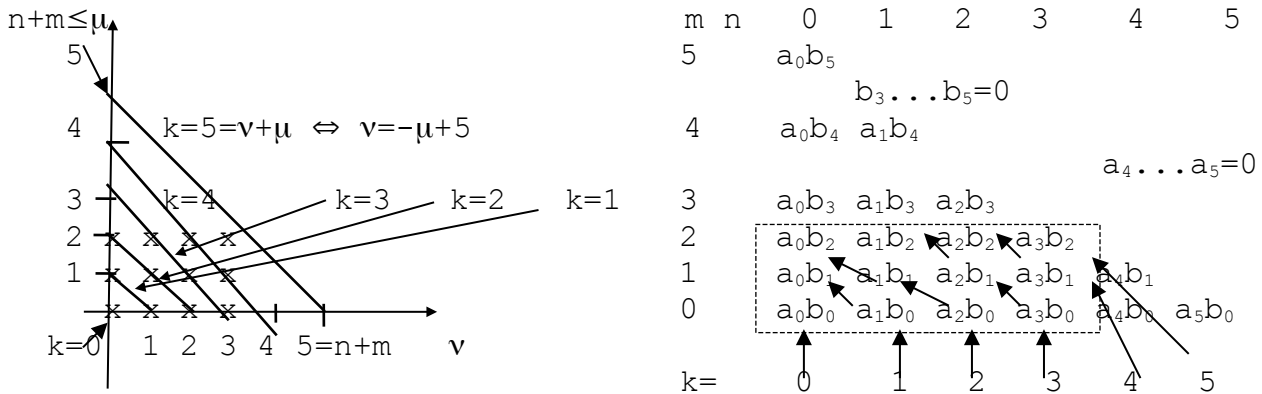
$a_k=0 \forall k>n$ und $b_k=0 \forall k>m$ gesetzt sei.

Bew: $P(z) * Q(z) = \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^m a_\nu b_\mu \underbrace{z^\nu z^\mu}_{z^{\nu+\mu}} \stackrel{*}{=} \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{\substack{0 \leq \nu \leq n+m \\ 0 \leq \mu \leq n+m \\ \nu+\mu=k}} a_\nu b_\mu z^k = \sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k \Rightarrow P * Q \text{ ist ein}$

Polynom.

beachte $a_\nu=0$ für $\nu>n$, $b_\mu=0$ für $\mu>m$. Rechts stehen mehr Summanden als links, aber Summe ist gleich.

Genauere Erläuterung der Umsummation am Bsp $n=3, m=2$,



Bei der linken Summe wird über alle Gitterpunkte im Rechteck $0 \leq \nu \leq n, 0 \leq \mu \leq m$ summiert, während bei der rechten Summe über alle Gitterpunkte im Dreieck $0 \leq \nu + \mu \leq n + m$ summiert wird. Man beachte, dass in den Punkten des Dreiecks ohne das Rechteck (diese Punkte hat man hinzugenommen) der Wert $a_\nu b_\mu = 0$ ist!

Bem: c_k läßt sich auch in der Form $c_k = \sum_{\nu=0}^k a_\nu b_{k-\nu}$ schreiben.

$$a_n \neq 0, b_m \neq 0 \Rightarrow c_{n+m} = \sum_{\nu=0}^{n+m} \underbrace{a_\nu}_{=0 \text{ for } \nu > n} * \underbrace{b_{n+m-\nu}}_{=0 \text{ für } n+m-\nu > m \text{ d.h. } \nu < n} = a_n b_m \neq 0$$

(alle Summanden = 0 für $\nu > n$). Also $\text{grad}(PQ) = n+m$

#Im Bsp oben $n=3, m=2$

$$\#c_0 = \sum_{\nu=0}^0 a_\nu b_{k-\nu} = a_0 b_{0-0}, \quad c_1 = \sum_{\nu=0}^1 a_\nu b_{k-\nu} = a_0 b_{1-0} + a_1 b_{1-1},$$

$$\#c_2 = \sum_{\nu=0}^2 a_\nu b_{k-\nu} = a_0 b_{2-0} + a_1 b_{2-1} + a_2 b_{2-2} \dots$$

$$\#c_5 = \sum_{\nu=0}^5 a_\nu b_{k-\nu} = a_0 \underbrace{b_{5-0}}_{=0 \text{ da } 5 > 2} + a_1 \underbrace{b_{5-1}}_{=0 \text{ da } 4 > 2} + a_2 \underbrace{b_{5-2}}_{=0 \text{ da } 3 > 2} + a_3 b_{5-3} + \underbrace{a_4}_{=0 \text{ da } 4 > 3} b_{5-4} + \underbrace{a_5}_{=0 \text{ da } 5 > 3} b_{5-5} = a_3 b_2$$

#Im Bsp $n=3, m=2$: für $k=4$ ist

$$\#c_4 = \sum_{\nu=0}^4 a_\nu b_{k-\nu} = a_0 \underbrace{b_{\mu=4 > m=2}}_{=0} + a_1 \underbrace{b_{\mu=3 > m=2}}_{=0} + a_2 b_2 + a_3 b_1 + \underbrace{a_{\nu=3 > n=3}}_{=0} b_0 = a_2 b_2 + a_3 b_1$$

b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, Hinweis: $(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$

// **S1.7.4** (906) $\alpha \in \mathbb{C}, n, m, k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}$: // $\binom{2n}{k} \underbrace{\binom{n}{k}}_{a_k}$

// 1.) $\binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1}$ //

// 3.) $\binom{\alpha}{n} = \binom{n}{n-m} \stackrel{2.)}{=} \frac{n!}{(n-m)!(n-m-n)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \stackrel{2.)}{=} \binom{n}{m}$ falls $n \geq m$ //

// 5.) $\binom{\alpha}{j} + \binom{\alpha}{j-1} = \binom{\alpha+1}{j}$ // $\binom{n}{k-v} \underbrace{\binom{n}{n-v}}_{\stackrel{S1.7.4.3.)}{=} \binom{n}{v}}$

// 6.) $\forall a, b, z \in \mathbb{C} \wedge n \in \mathbb{N}_0: (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^{n-k} a^k$

Bew: $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \stackrel{\text{Binomialsatz}}{=} (x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n \stackrel{\text{Binomialsatz}}{=} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right] \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right] \stackrel{A1.9.2}{=} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, \sum_{k=0}^{2n} \left[\sum_{v=0}^k \binom{n}{v} \binom{n}{k-v} \right] x^k \forall x \in \mathbb{C} \stackrel{S1.7.4}{=} \binom{2n}{n} = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \binom{n}{k-v} \forall k=0, 1, \dots, 2n \stackrel{2n}{=} \sum_{k=n}^{2n} \binom{n}{v} \binom{n}{k-v} = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \binom{n}{n-v} \stackrel{S1.7.4.3.)}{=} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v}^2$

A1.9.3

a) Beweise $\binom{p+q}{v} = \sum_{j=0}^v \binom{p}{j} * \binom{q}{v-j}$

Lös: $(1+x)^p (1+x)^q = (1+x)^{p+q} \forall x \in \mathbb{R} \wedge : (1+x)^p (1+x)^q = \left[\sum_{j=0}^p \binom{p}{j} x^j \right] \left[\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} x^k \right] = \sum_{v=0}^{p+q} x^v \sum_{j=0}^v \binom{p}{j} \binom{q}{v-j} \stackrel{\text{Beh}}{\stackrel{\text{Koeffizientenvergleich}}{=}}$

b) Beweise $\forall n, m \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\sum_{k=0}^{n+m} \binom{n}{k} * \binom{m}{k} = \binom{m+n}{n}$

// **A1.9.2** (1101) $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, Q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$: //

// $P(z) \cdot Q(z) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k, c_k = \sum_{v+\mu=k} a_v b_\mu, k=0, \dots, n+m, //$

// $a_k=0 \forall k > n$ und $b_k=0 \forall k > m$ gesetzt sei. //

Bew: $P(z) = (1+z)^{m+n}$. Dann gilt $P(z) = \sum_{v=0}^{n+m} \binom{m+n}{v} z^v$ und

$P(z) = (1+z)^m (1+z)^n = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} z^j \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = \sum_{v=0}^{n+m} z^v \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n \\ j+k=v}} \binom{m}{j} \binom{n}{k} = \sum_{v=0}^{n+m} z^v \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \binom{n}{v-j} .$

Nach Identitätssatz für Polynome

$$\binom{n}{n-j}$$

$$\binom{m+n}{n} = \sum_{j=0}^{m+n} \binom{m}{j} \binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{m+n} \underbrace{\binom{m}{j} \binom{n}{j}}_{0 \text{ für } j > m, n}$$

A1.9.4 (Polynomdivision) Gegeben seien Polynome F und G mit $G \neq 0$. Beweise, dass dann Polynome Q und R mit $\gamma(R) < \gamma(G)$ existieren mit $F(x) = Q(x)G(x) + R(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Sind Q und R eindeutig bestimmt?

Hinweis: Es sei $\gamma(G) = m$ und $\gamma(F) = n+1$ sowie $G(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ und

$F(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$. O.B.d.A. sei $m > 0$. Führe eine Induktion nach n

durch. Reduziere hierbei den Grad durch Betrachtung des

Polynoms $\tilde{F}(x) = F(x) - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} G(x)$.

Bew: #Vorbetrachtung:

$$\# \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k \right) : \left(\sum_{k=0}^m b_k x^k \right) = (a_{n+1} x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_0 x^0) : (b_m x^m + \dots + b_0 x^0) =$$

$$\# \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} + \dots \text{ usw.}$$

$$\# 1. \text{ Rest: } \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} (b_m x^m + \dots + b_0 x^0) =$$

$$\# \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k - a_{n+1} x^{n+1} - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} (b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 x^0) =$$

$$\# \sum_{k=0}^n a_k x^k - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} (b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 x^0)$$

$$\text{O.B.d.A. } \gamma(G) > 0, \text{ sonst } G(x) \equiv c \neq 0 \Rightarrow F(x) = \underbrace{\frac{F(x)}{c}}_{=Q(x)} G(x) + \underbrace{0}_{R(x)}$$

A(n): Zu jedem Polynom F vom $\gamma(F) \leq n$ und G vom $\gamma(G) = m$ existieren Polynome Q und R wie oben.

Bew: von A(n) $\forall n \in \mathbb{N}$ mit Induktion nach n . Setze $m = \gamma(G)$.

Der „erste“ Rest #bezogen auf $(\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k) : (\sum_{k=0}^m b_k x^k) \dots$ hat noch

#nichts mit Induktion nach $n+1$ zu tun

$$\tilde{F}(x) = F(x) - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} G(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} (b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 x^0) \Rightarrow$$

grad $\tilde{F}(x) = n < n+1$, d.h. es gilt A(n)

weiter siehe unten

$n \leq m-1$, d.h. auch

$n = m-1$: Es sei $\gamma(F) < \gamma(G) = m$.

Setze $Q(x) \equiv 0$ und $R(x) \equiv F(x) \Rightarrow$

$\gamma(R) < m$ und $F(x) = \underbrace{Q(x)}_{=0} G(x) + R(x)$

$n \mapsto n+1$: Es gelte A(n) für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter $G(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ mit $b_m \neq 0$

und $F(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$ ein Polynom $\gamma \leq n+1$

Betrachte $\tilde{F}(x) = F(x) - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} G(x) =$

$$\sum_{k=0}^n a_n x^k + a_{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} (-b_m x^m - \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k) =$$

$$\sum_{k=0}^n a_n x^k - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k = \sum_{k=0}^n a_n x^k - \frac{a_{n+1}}{b_m} \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^{k+n+1-m}$$

$$\Leftrightarrow \text{grad}(\tilde{F}) \leq n \Leftrightarrow$$

$$k \leq m-1; n+1-m \leq k+n+1-m \leq n$$

IndHyp

\exists Polynom mit \tilde{Q}, \tilde{R} mit $\tilde{F}(x) = \tilde{Q}(x) G(x) + \tilde{R}(x)$ und $\gamma(\tilde{R}) < m$

$$F(x) = \tilde{F}(x) + \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} G(x) = \tilde{Q}(x) G(x) + \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} G(x) + \tilde{R}(x) =$$

$$\underbrace{\left(\tilde{Q}(x) + \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} \right)}_{=Q(x)} G(x) + \underbrace{\tilde{R}(x)}_{=R(x)}$$

Eindeutigkeit:

Es gelte $F(x) = Q_1(x) G(x) + R_1(x) = Q_2(x) G(x) + R_2(x)$ mit $\gamma(R_1) < m$ \vee $\text{grad}(R_2) < m$

$\Rightarrow (Q_1(x) - Q_2(x)) G(x) = R_1(x) - R_2(x)$

Annahme $Q_1 \neq Q_2 \Rightarrow \gamma((Q_1(x) - Q_2(x)) G(x)) \geq m$ Widerspruch zu

$\gamma(R_2(x) - R_1(x)) \leq m-1 \Rightarrow Q_1(x) \equiv Q_2(x) \Rightarrow R_1(x) \equiv R_2(x)$

A1.9.5

$$S(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k, \quad T(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k, \quad a_m \neq 0, \quad b_n \neq 0,$$

$$(S \cdot T)(x) = \left(\sum_{k=0}^m a_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k x^k \right) = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^n a_k b_j x^{k+j} = \sum_{l=0}^{m+n} \sum_{k+j=l} a_k b_j x^l, \quad 0 \leq k \leq m, \quad 0 \leq j \leq n$$

Höchste Potenz $m+n$, $\gamma(S \cdot T) = \gamma(S) + \gamma(T)$.

$$(S+T)(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k + \sum_{k=0}^n b_k x^k \stackrel{\text{oBdA } m \leq n}{=} \sum_{k=0}^m (a_k + b_k) x^k + \sum_{k=m+1}^n b_k x^k \Rightarrow \gamma(S+T) = \begin{cases} n, & \text{falls } m < n \\ \geq m, & \text{falls } m = n \dots \end{cases}$$

falls $a_m + b_m = 0 \dots < \dots \gamma(S+T) \leq \max\{\gamma(S), \gamma(T)\}$

$$P(x) = \binom{\alpha+x}{v} = \binom{x+\alpha}{v} = \frac{(x+\alpha)(x+\alpha-1)\dots(x+\alpha-v+1)}{v!},$$

Zähler v Faktoren $\Rightarrow \gamma(P(x)) = v$

$$Q(x) = \sum_{j=0}^v \binom{\alpha}{j} \binom{x}{v-j} = \sum_{j=0}^v \binom{\alpha}{j} \left(\frac{x(x-1)\dots(x-v+j+1)}{(v-j)!} \right)$$

a) Seien P, Q, Q_1 und R Polynome.

Zeige: (.) Aus $P = Q_1 Q + R$ mit $\gamma(R) < \gamma(Q)$ folgt $\gamma(Q_1) = \gamma(P) - \gamma(Q)$, außer

(..) wenn $\gamma(P) < \gamma(Q)$ und dann ist Q_1 das Nullpolynom.

Lös: (*) $\gamma(P) = \gamma(Q_1 Q + R) \leq \max\{\gamma(Q_1 Q), \gamma(R)\} = \max\{\gamma(Q_1) + \gamma(Q), \gamma(R)\}$

(.) $\gamma(P) \geq \gamma(Q)$, Beh. Q_1 ist nicht Nullpolynom

Bew: Annahme Q_1 ist Nullpolynom \Rightarrow

$$\gamma(P) = \gamma(Q_1 Q + R) \leq \max\{\gamma(Q_1 Q), \gamma(R)\} \stackrel{Q_1=0}{=} \gamma(R) \stackrel{*}{\geq}$$

$\gamma(P) \leq \gamma(R) < \gamma(Q) \Rightarrow$ Widerspruch zur Vor. $\gamma(P) \geq \gamma(Q)$

$$\gamma(Q_1 Q) = \gamma(Q_1) + \gamma(Q) \geq \gamma(Q) \geq \gamma(R) \Rightarrow$$

in (*) gilt \Rightarrow " also $\gamma(P) = \gamma(Q_1) + \gamma(Q) \Rightarrow$

$$\gamma(Q_1) = \gamma(P) - \gamma(Q)$$

(..) $\gamma(P) < \gamma(Q)$. Annahme: Q_1 ist nicht Nullpolynom \Rightarrow

$$\gamma(Q_1 Q) = \gamma(Q_1) + \gamma(Q) \geq \gamma(Q) > \gamma(R) \Rightarrow$$

$$\gamma(P) = \max\{\gamma(Q_1) + \gamma(Q), \gamma(R)\} = \gamma(Q_1) + \gamma(Q) \geq \gamma(Q)$$

Widerspruch zur Vor $\Rightarrow Q_1$ Nullpolynom

b) Finde Polynome Q_1 und R mit $x^5 - 2x^2 = Q_1(x)(x-1)^2 + R(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, und $\gamma(R) < 2$.

Lös: $(x^5 - 2x^2) : (x^2 - 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ Rest $x - 2 \Rightarrow$

$$(x^5 - 2x^2) = (x^3 + 2x^2 + 3x + 2)(x-1)^2 + (x-2)$$

$$(\gamma(P) = 5 > \gamma(Q) = 3 \Rightarrow \gamma(Q_1) = 5 - 2 = 3),$$

$$(x^5 - 2x^2) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)(x^2 - 2x + 1) + b_0 + b_1 x = \dots$$

$$a_3 x^5 + (a_2 - 2a_3) x^4 + (a_1 - 2a_2 + a_3) x^3 + (a_0 - 2a_1 + a_2) x^2 + (-2a_0 + a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

$$a_3 = 1, \quad a_2 - 2a_3 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_1 - 4 + 1 = 0, \quad a_1 = 3, \quad a_0 - 6 + 2 = 2, \quad a_0 = 6, \quad -12 + 2 + b_1 = 0,$$

$$b_1 = 9, \quad 6 + b_0 = 0, \quad b_0 = -6$$

A1.9.6 Zeige: Sind $P, Q \in \mathbb{K}_n[x]$, so ist $PQ \in \mathbb{K}[x]$ und es gilt $\gamma(PQ) = \gamma(P) + \gamma(Q)$, auch falls eines der Polynome (oder beide) das Nullpolynom ist(sind)

A1.9.7 Zeige, daß die Menge $\mathbb{K}(x)$ der rationalen Funktionen mit Koeffizienten in \mathbb{K} ein Körper ist.

A1.9.8 Beweise für $v \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ die Identität

$$(*) \sum_{j=0}^v \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{v-j} = \binom{\alpha+\beta}{v}. \text{ Siehe auch A1.9.3.}$$

Anleitung: Nimm zunächst $\alpha=p \in \mathbf{N}$ an. Zeige, dass dann $P(x) = \binom{\alpha+x}{v}$

und $Q(x) = \sum_{j=0}^v \binom{\alpha}{j} \binom{x}{v-j}$ Polynome vom Grad $\leq v$ sind. Folgere aus Aufgabe

Polynomdivision, dass $P(x)=Q(x)$ gilt $\forall x \in \mathbf{N}$. Wende dann den Identitätssatz für Polynome an. Schließe dann analog, dass die Gleichung auch für $\alpha \in \mathbf{C}$ gilt.

// **A1.7.9** (910) Zeige für $p, q, v \in \mathbf{N}_0$ die Formel $\binom{p+q}{v} = \sum_{j=0}^v \binom{p}{j} \binom{q}{v-j}$. //

// **A1.9.3** (1107) Beweise $\forall n, m, k \in \mathbf{N}$ die Gleichung $\sum_{k=0}^{n+m} \binom{n}{k} * \binom{m}{k} = \binom{m+n}{k}$ //

// Bew: $P(z) = (1+z)^{m+n}$ Nach Identitätssatz für Polynome //

$$// \binom{m+n}{n} = \sum_{j=0}^{m+n} \binom{m}{j} \binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{m+n} \underbrace{\binom{m}{j} \binom{n}{j}}_{0 \text{ für } j > m, n} //$$

Bew: (*) A1.7.9, A1.9.3: $\sum_{j=0}^v \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{v-j} = \binom{\alpha+\beta}{v} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}$ (nicht $\in \mathbf{C}$!)

Zunächst $\alpha=p \in \mathbf{N}$.

Setze $P(x) = \binom{\alpha+x}{v} = \frac{\overbrace{(\alpha+x)(\alpha+x-1)\dots(\alpha+x-v+1)}^{v \text{ Terme}}}{v!} \Rightarrow \gamma(P) \leq v$

$$Q(x) = \sum_{j=0}^v \binom{\alpha}{j} \binom{x}{v-j} = \sum_{j=0}^v \binom{\alpha}{j} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-v+1)}{(v-j)!} \Rightarrow \gamma(Q) \leq v$$

Es gilt $P(x)=Q(x) \quad \forall x \in \mathbf{N}$ wegen (*).

$P(x)$ und $Q(x)$ stimmen an mehr als $v+1$ Stellen überein...

Identitätssatz Polynome $\Rightarrow P(x)=Q(x) \quad \forall x \in \mathbf{C} \Rightarrow$

$$\sum_{j=0}^v \binom{\alpha}{j} \binom{\beta}{v-j} = \binom{\alpha+\beta}{v} \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}, \beta \in \mathbf{C} \quad (**)$$

$$\tilde{P}(x) = \binom{\alpha+\beta}{v}, \quad \tilde{Q}(x) = \sum_{j=1}^v \binom{x}{j} \binom{\beta}{v-j}, \quad \tilde{P}(x) = \tilde{Q}(x) \quad \forall x \in \mathbf{N} \text{ wegen } (**).$$

Identitätssatz: $\tilde{P}(x) = \tilde{Q}(x) \quad \forall x \in \mathbf{C}$.

??

A1.9.9 Algebraische Zahlen. Eine Zahl ξ heißt algebraische Zahl, wenn ξ Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist, wenn also $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z} (a_n \neq 0)$ existieren mit $a_0 + a_1 \xi + \dots + a_n \xi^n = 0$. Insbesondere ist jede rationale Zahl p/q als Lösung der Gleichung $p - qx = 0$ # $\underbrace{p}_{a_0} - \underbrace{q}_{a_1} \underbrace{x}_{\xi} = 0$ # eine algebraische Zahl.

a) Zeige, dass die Menge der Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten abzählbar ist.

Lös: Z.z. $M = \{P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{Z} : j = 1 \dots n\}$ abzählbar

Bew: $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, a_j \in \mathbb{Z} : 1 \dots n\}$

(M_n Polynome vom Grad $\leq n$)

Beh: M_n höchstens abzählbar $\Rightarrow M$ höchstens abzählbar

Bew: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest, setze $J = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ endlich und $A_j = \mathbb{Z} \neq \emptyset$.

? $A = \overset{n}{\dot{\bigcup}}_{j=0} A_j = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} \cup \dots \cup \mathbb{Z}$ ($n+1$ mal).

$\forall P \in M_n, P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ $a \in \mathbb{Z}$ ist durch $f: J \rightarrow A, f(j) = a_j$ eine Abb definiert und umgekehrt für $f: J \rightarrow A, f(j) \in \mathbb{Z}$ ist ein

Polynom definiert d.h. $M_n = \overset{X}{\prod}_{j \in J} \mathbb{Z} = \overset{n}{\overset{X}{\prod}}_{j=0} \mathbb{Z}$ kart Prod endlich.

\mathbb{Z} höchstens abzählbar $\Rightarrow M_n$ höchstens abzählbar

b) Zeige, dass die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist.

Lös: Z.z. $A = \{\xi \text{ ist algebraische Zahl}\}$ ist höchstens abzählbar.

Bew: $A = \{\xi \in \mathbb{C} : P(\xi) = 0 \text{ für ein } P \in M\} =$

$\overset{n}{\dot{\bigcup}}_{n \in \mathbb{N}} \{\xi \in \mathbb{C} : P(\xi) = 0 \text{ für ein } P \in M_n\} = \overset{n}{\dot{\bigcup}}_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Es gilt: $P \in M_n, (\gamma) P \leq n \Rightarrow$ es gibt max n Nullstellen.

Beh: A_n ist höchstens abzählbar $\Rightarrow A$ ist höchstens abzählbar.

Bew: $A_n = \bigcup_{P \in M_n} \underbrace{\{\xi \in \mathbb{C} : p(\xi) = 0\}}_{N_p \text{ max } n \text{ Elemente}}, M_n \text{ abzählbar} \Rightarrow A_n = \overset{n}{\dot{\bigcup}}_{p \in M_n} N_p$

höchstens abzählbar.