A1.8.1

a) Ungleichung für arithmetisches und geometrisches Mittel

$\sqrt{ab} \le (a+b)/2 \ \forall\ a,b\ge 0$. Wann gilt hier genau Gleichheit?

*//**A1.2.9** (408) a,b∈K. Zeige: d) $2(a^2+b^2)\ge(a+b)^2\ge 4ab$//*

Lös: $\underbrace{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\ge 0}_{d.h.\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\ge ab=(\sqrt{ab})^2}$ mit „=0" ⇔ $\frac{a-b}{2}=0$ ⇔ a=b

$\underset{A1.2.9}{\Rightarrow}$ $\underbrace{\left|\frac{a+b}{2}\right|}_{=\frac{a+b}{2}} \ge |\sqrt{ab}| = \sqrt{ab}$ da a,b≥0 nach Vor. und „=" ⇔ a=b

b) Zeige mit Hilfe der AGM Ungleichung für n,p∈N mit n≥2p, dass

$\sqrt[n]{n^p} < 1+2p/\sqrt{n}$. Anl: Setze $x_j=\sqrt{n}$ für $1\le j\le 2p$

Lös:Anl ⇒ $\prod_{j=1}^{2p}\sqrt{n} = (\sqrt{n})^{2p}=n^p$. Setze $x_j=1$ für $2p<j\le n$, dann $\prod_{j=1}^{n} x_j=n^p$.

$\sqrt[n]{n^p} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} = G(x_1,\ldots x_n) < A(x_1,\ldots x_n) = 1/n\sum_{j=1}^{n} x_j =$

$1/n\left(\sum_{j=1}^{2p}\sqrt{n} + \sum_{j=2p+1}^{n} 1\right) = 1/n(2p\sqrt{n}+(n-2p)) = \frac{2p}{\sqrt{n}} + 1-2p/n < 2p/\sqrt{n}+1$

c) Für $x_1,\ldots x_n>0$ heißt $H(x_1,\ldots x_n)=\frac{1}{A(1/x_1,\ldots 1/x_n)}$ das harmonische Mittel

der Zahlen x_j. Leite aus der AGM Ungleichung ab, dass

$H(x_1,\ldots x_n)\le G(x_1,\ldots x_n)$ gilt, mit = genau dann, wenn alle x_j gleich sind

Lös: $H=\frac{1}{A}\le\frac{1}{G(1/x_1,\ldots,1/x_n)}=\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}(1/x_j)}}=\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}x_j}=G(x_1,\ldots x_n)$.