A1.7.1

a) Berechne für $n \in \mathbb{N}$ die Summen • $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j}{k}$ und •• $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j^2}{k+1}$

Lös: • $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j}{k} \underbrace{=}_{1\le j\le k\le n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} j \underbrace{=}_{Bsp\ 2.)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2k} = \sum_{k=1}^{n}$
$\frac{(k+1)}{2} = \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1) = \frac{1}{2} (\frac{n(n+1)}{2} + n) = \frac{n}{4} (n+1+2) = \frac{n(n+3)}{4}$

•• $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k} j^2 \underbrace{=}_{Bsp\ 3.)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(2k+1)}{(k+1)6} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} k =$
$\frac{n(n+1)(2n+1)}{18} + \frac{n(n+1)}{12} = \frac{n(n+1)}{36} (4n+2+3) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{36}$

b) Beweise: $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k^3}{2}\right] = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left[\frac{n+1}{2}\right] \right)$, [ ]: Das größte Ganze

Bew: Wenn k gerade ⇒ k^3 gerade ⇒ $\frac{k^3}{2} \in \mathbb{Z}$, d.h.

Wenn k ungerade ⇒ k^3 ungerade ⇒ $\frac{k^3}{2} - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, d.h. $\left[\frac{k^3}{2}\right] = \frac{k^3}{2} - \frac{1}{2}$.

Unter den natürlichen Zahlen 1,2,...,n sind $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ ungerade

Zahlen ⇒ $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k^3}{2}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{2} - \left[\frac{n+1}{2}\right] \frac{1}{2} \underbrace{=}_{Bsp\ 4.)} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left[\frac{n+1}{2}\right] \right)$

A1.7.2 Zeige:

a) $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0$

Lös: Teleskopsumme $\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m \quad \forall\ n+1 \ge m$ (d.h. auch n+1=m !) ⇒

$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \sum_{\nu=1}^{n} (1/\nu - \frac{1}{\nu+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$ für $n+1 \ge 1$, d.h. für $n \ge 0$, $n \in \mathbb{N}_0$

Genauer: $= \sum_{\nu=1}^{n} (\underbrace{-\frac{1}{\nu+1}}_{a_{k+1}} - (\underbrace{-\frac{1}{\nu}}_{a_k})) = a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+1} - (-\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n+1}$

b) $\prod_{\nu=1}^{n} (1+1/\nu) = n+1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0$

Lös: Teleskopprodukt $\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$ für $n+1 \ge m$, $a_k \ne 0$ für $m \le k \le n$

Bew anlog Teleskopsumme, d.h. Induktion

⇒ $\prod_{\nu=1}^{n} (1+1/\nu) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\nu+1}{\nu} = \frac{n+1}{1} = n+1$ für $n+1 \ge 1$, d.h. $n \in \mathbb{N}$

c) $\prod_{\nu=0}^{n} (1+x^{2^\nu}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ ∀ $n \in \mathbb{N}_0$ und ∀ $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ $\left\{\begin{matrix} 1, \text{ falls } n<m \\ a_m, \text{ falls } n=m \\ \prod_{k=m}^{n-1} a_k * a_n, \text{ falls } m+1 \geq n \end{matrix}\right\}$

(oder $\prod_{\nu=1}^{n} (1+x^{2^\nu}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^2}$ oder $\prod_{\nu=1}^{n} (1+x^{2^\nu}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}$ o.ä.)

//*D1.5.2 (709) K:* $\prod_{k=m}^{n} a_k := \left\{\begin{matrix} 1, \text{ falls } n<m \\ a_m, \text{ falls } n=m \\ \prod_{k=m}^{n-1} a_k * a_n, \text{ falls } m+1 \geq n \end{matrix}\right\}$

Bew:Induktion nach n, Induktionsanfang

n=o: $\prod_{\nu=0}^{0} (1+x^{2^\nu}) = 1+x^{2^0} \underbrace{=}_{D\,1.5.2} 1+x^1 = 1+x = \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{1-x^{2^{0+1}}}{1-x}$ ∀ $x \neq 1$

n $\underbrace{a}_{n \geq 0}$ n+1: $\prod_{\nu=0}^{n+1} (1+x^{2^\nu}) = [\underbrace{\prod_{\nu=0}^{n} (1+x^{2^\nu})}_{Ind\ Hyp}] (1+x^{2^{n+1}}) \underbrace{=}_{IndHyp} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} (1+x^{2^{n+1}}) =$

$\frac{1-(x^{2^{n+1}})^2}{1-x} = \frac{1-x^{2 \cdot 2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1-x^{2^{(n+1)+1}}}{1-x}$ ∀ $x \neq 1$

A1.7.3 Es seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a>b>0$ sowie $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

Zeige, daß dann $na^{n-1} > \frac{a^n-b^n}{a-b} > nb^{n-1}$ gilt.

//*S1.7.2 (903) $a,b \in C$, $n \in N_0$: 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ //*

Lös: $\frac{a^n-b^n}{a-b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-1-k} = a^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = na^{n-1}$ und

$\frac{a^n-b^n}{a-b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \geq \sum_{k=0}^{n-1} b^k b^{n-1-k} = b^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = nb^{n-1}$.

A1.7.4 Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sei definiert durch

$a_1=1$ und $a_{n+1}=\frac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16}$ für $n\in\mathbb{N}$. Bestimme eine explizite Darstellung von a_n.

Lös: $a_1=1$, $a_2=5/8$, $a_3=15/32$, $a_4=51/128$, $a_5=187/512$

$\sqrt{1+24a_n}$ $=5$, 4, $7/2$, $13/4$, $25/8$

Beobachtung: $2^n\sqrt{1+24a_n}=b_n$ ist ganzzahlig. Dann gilt

$b_1=10$ und für $n\in\mathbb{N}$

$$b_{n+1}=2^{n+1}\sqrt{1+24a_{n+1}} = 2^{n+1}\sqrt{1+\frac{3}{2}\left(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}\right)} =$$

$$2^{n+1}\sqrt{\frac{2+3+12a_n+3\sqrt{1+24a_n}}{2}} = 2^{n+1}\sqrt{\frac{5+12a_n+3*2^{-n}b_n}{2}} =$$

$$2^{n+1}\sqrt{\frac{9+(1+24a_n)+6*2^{-n}b_n}{4}} = 2^n\sqrt{9+\left(\frac{b_n}{2^n}\right)^2+6*2^{-n}b_n} =$$

$$2^n\sqrt{\left(\frac{b_n}{2^n}+3\right)^2} = 2^n\left(\frac{b_n}{2^n}+3\right)=b_n+3*2^n \Rightarrow b_{n+1}-b_n=3*2^n \Rightarrow$$

$$b_n=\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)}_{Telesks:\, b_n-b_1}+\underbrace{10}_{b_1}=\sum_{k=1}^{n-1}3*2^k+10=6\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}+10\underset{v=k-1}{=}6\sum_{v=0}^{n-2}2^v+10=6\,\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+10=$$

$3*2^n+4$ für $n\in\mathbb{N}$.

$$1+24a_n=\left(\frac{b_n}{2^n}\right)^2=\left(\frac{3*2^n+4}{2^n}\right)^2=(3+2^2 2^{-n})^2=(3+2^{2-n})^2.$$

$$a_n=\frac{(3+2^{2-n})^2-1}{24} \quad \text{für } n\in\mathbb{N}$$

A1.7.5

a) Es seien $n\in\mathbb{N}$ und $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. Zeige $\left(\sum_{v=1}^{n}a_v\right)^2\le n\sum_{v=1}^{n}a_v^2$.

Wann genau gilt Gleichheit?

b) Zeige: $\sum_{v=1}^{n}\frac{1}{v^3}<2 \quad \forall\ n\in\mathbb{N}$.

A1.7.6

Berechne $\left(5^{1/2}\right)$ und $\left(3^{i-2}\right)$

Lös: $$\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{5!}=\frac{1*7}{2^5*2*4}=\frac{7}{2^8}=\frac{7}{256}$$

$$\frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{3!}=\frac{5}{6}(5-3i)$$

A1.7.7 Zeige für $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, dass $\binom{\alpha}{n}=0 \Leftrightarrow \alpha\in\mathbb{N}_0$ und $n>\alpha$

Lös: $$\frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}^{1\,\text{Faktor}\,0}}{n!}$$

A1.7.8 Zeige

a) $\sum_{v=k}^{n} \left(k^{v}\right) = \left(k+1^{n+1}\right)$ $\forall$ k,n∈**N** mit n≥k

*//**S1.7.4** (906)α∈C; n,m,k∈N_0, j∈N 1.)* $\left(n^{\alpha}\right) + \left(n+1^{\alpha}\right) = \left(n+1^{\alpha+1}\right)$ //

Bew:Induktion nach n bei festem k∈**N**

$$\text{n=k:} \quad \sum_{v=k}^{k} \left(k^{v}\right) = \left(k^{k}\right) = 1 = \left(k+1^{k+1}\right)$$

$$\text{n} \underbrace{\mapsto}_{n\geq k} \text{n+1:} \sum_{v=k}^{n+1} \left(k^{v}\right) = [\sum_{v=k}^{n} \left(k^{v}\right)] + \left(k^{n+1}\right) \underbrace{=}_{IndHyp} \left(k+1^{n+1}\right) + \left(k^{n+1}\right) \underbrace{=}_{\text{S1.7.4 1.)}} \left(k+1^{n+2}\right) = \left(k+1^{(n+1)+1}\right)$$

b) $\sum_{k=0}^{n} \left(k^{n}\right)^2 = \left(n^{2n}\right)$, Hinweis: $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$

Bew: $\sum_{k=0}^{2n} \left(k^{2n}\right) x^k \underbrace{=}_{Binominalsatz} (x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n \underbrace{=}_{Binominalsatz} [\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(k^{n}\right)}_{a_k} x^k)][\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(k^{n}\right)}_{b_k} x^k)] \underbrace{=}_{A1.9.2}$

$\sum_{k=0}^{n} \left(k^{n}\right)^2 = \left(n^{2n}\right)$, $\sum_{k=0}^{2n} [\sum_{v=0}^{k} \left(v^{n}\right) \left(k-v^{n}\right) x^k$ $\forall$ x∈**C** $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.7.4} \left(k^{2n}\right) = \sum_{v=0}^{k} \left(v^{n}\right) \left(k-v^{n}\right)$ $\forall$

k=0,1,…2n $\underbrace{\Rightarrow}_{k=n}$

$$= \sum_{v=0}^{n} \left(v^{n}\right) \underbrace{\binom{n}{v}}_{\underbrace{=}_{S1.7.4\,3.)} \binom{a}{b}} = \sum_{v=0}^{n} \left(v^{n}\right)^2$$

A1.7.9 Zeige für p,q,ν∈N_0 die Formel $\binom{p+q}{v} = \sum_{j=0}^{v} \binom{p}{j}\binom{q}{v-j}$.

(siehe auch A1.9.8 (1107))

Lös: ∀ x∈**R** gilt $(1+x)^p(1+x)^q=(1+x)^{p+q}$ und

$$(1+x)^p(1+x)^q = \left[\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} x^j\right]\left[\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} x^k\right] = (1+x)^{p+q} = \left[\sum_{v=0}^{p+q} \binom{p+q}{v} x^v\right]$$

oBdA p>q

$$(\binom{p}{0}x^0 + \binom{p}{1}x^1 + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + .. \binom{p}{p}x^p) + (\binom{q}{0}x^0 + \binom{q}{1}x^1 + \binom{q}{2}x^2 + \binom{q}{3}x^3 + \ldots \binom{q}{q}x^q) =$$

$$\binom{p}{0}\binom{q}{0}x^0 + \binom{p}{0}\binom{q}{1\text{-}0}x^1 + \binom{p}{0}\binom{q}{2\text{-}0}x^2 + \binom{p}{0}\binom{q}{3}x^3 + \ldots \quad \binom{p}{0}\binom{q}{q}x^q +$$

$$\binom{p}{1}\binom{q}{1-1}x^1 + \binom{p}{1}\binom{q}{2-1}x^2 + \binom{p}{1}\binom{q}{2}x^3 + \binom{p}{1}\binom{q}{3}x^4 + \ldots \quad \binom{p}{1}\binom{q}{q-1}x^q + \binom{p}{1}\binom{q}{q}x^{q+1} +$$

$$\binom{p}{2}\binom{q}{2-2}x^2 + \binom{p}{2}\binom{q}{1}x^3 + \binom{p}{2}\binom{q}{2}x^4 \ldots \quad + \binom{p}{2}\binom{q}{q}x^{q+2} + \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\binom{p}{p}\binom{q}{q}x^{q+p}$$

$= \sum_{v=0}^{p+q} x^v \sum_{j=0}^{v} \binom{p}{j}\binom{q}{v-j}$ und Koeffizientenvergl.

A1.7.10 Zeige folgende Idenditäten für Binominalkoeffizienten:

a) Folgere aus $\binom{\alpha}{k}+\binom{\alpha}{k-1}=\binom{\alpha+1}{k}$ für $\alpha\in\mathbb{C}$ und $k\in\mathbb{N}$, dass $\binom{n}{m}\in\mathbb{N}_0$ $\forall$ $n,m\in\mathbb{N}_0$.

Lös: Z.z. $\binom{n}{m}\in\mathbb{N}_0$ $\forall$ $n,m\in\mathbb{N}_0$. Es gilt $\binom{\alpha}{0}=1$ $\forall$ $\alpha\in\mathbb{C}$, $\binom{n}{0}=1\in\mathbb{N}_0$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$,

n<m: $\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)(n-2)..(n-m+1))(n-n)(n-n-1)\dots(n-m+1}{m!}=$ $0\in\mathbb{N}_0$

Induktion über n

Induktionsanfang n=0: $\binom{0}{m}=0\in\mathbb{N}_0$ $\forall$ m>0, $\binom{0}{0}=1\in\mathbb{N}$ und $\binom{0}{m}\in\mathbb{N}_0$ $\forall$ $m\in\mathbb{N}_0$.

Induktionshypothese : $\binom{n}{m}\in\mathbb{N}_0$ $\forall$ $m\in\mathbb{N}_0$ für ein $n\in\mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt n→n+1: Z.z. $\binom{n+1}{m}\in\mathbb{N}_0$ $\forall$ $m\in\mathbb{N}_0$.

1.Fall: m=0 ⇒ $\binom{n+1}{0}=1\in\mathbb{N}_0$.

2.Fall: m>0 ⇒ $\binom{n+1}{m}=\underbrace{\binom{n}{m}}_{\in N_0}+\underbrace{\binom{n}{m-1}}_{\text{IH:}\in N_0}\in\mathbb{N}_0$ ⇒ Beh.

b) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

Bew: $=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1)^{n-k}=(-1+1)^n=0^n=0$

c) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2=(-1)^n\binom{n+1}{2}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

Bew: Induktionsanfang n=1 : $(-1)^1 1^2=-1$, $(-1)^1\binom{2}{2}=-1$

Induktionshypothese : $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2=(-1)^n\binom{n+1}{2}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

Induktionsschritt n→n+1: Z.z. $\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2=(-1)^{n+1}\binom{n+2}{2}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2+(-1)^{n+1}(n+1)^2\underbrace{=}_{IndH}$$
$$(-1)^n\binom{n+1}{2}+(-1)^{n+1}(n+1)^2=$$
$$(-1)^{n+1}\left(-\binom{n+1}{2}+(n+1)^2\right)=(-1)^{n+1}\binom{n+2}{2}$$

NR: $(n+1)^2-\binom{n+1}{2}=n^2+2n+1-\frac{(n+1)n}{2!}=$

$\frac{2n^2+4n+2-n^2-n}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}=\binom{n+2}{2}$

A1.7.11 Beweise für $n\in\mathbb{N}$ die Ungleichung $\frac{1}{2n+1}\le\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

durch vollständige Induktion.

//**S1.7.4** *(906)n,m∈N₀, j∈N: 2.)* $\binom{n}{m} = \begin{cases} 0 \text{ falls } n<m \\ \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \text{falls} n \geq m \end{cases}$ // $\binom{2n+2}{n+1}$

Bew:n=1: $1/3 \leq \frac{1}{4}\binom{2}{1} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 1/3 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

$n \mapsto n+1$: Beachte, dass $\frac{1}{4^{n+1}}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} \underbrace{=}_{S1.7.4\ 2.)} \frac{1}{4^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} =$

$$\frac{1}{4^n}\frac{2n!}{(n!)^2}\frac{1}{4}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{1}{4^n}\frac{2n!}{(n!)^2}\frac{(2n+1)(n+1)}{(2(n+1))^2} \underbrace{=}_{S1.7.4\ 2.)} \frac{2n+1}{2n+2}\underbrace{\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}_{I.H.\geq\frac{1}{2n+1}} \geq$$

$$\frac{2n+1}{2n+2}\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2(n+1)} \geq \frac{1}{2(n+1)+1} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\underbrace{\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}_{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}} \leq \frac{2n+1}{2n+2}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} ==$$

$$\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\frac{\sqrt{(2n+3)(2n+1)}}{\sqrt{(2n+2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\sqrt{\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

A1.7.13 Zu Zeigen: $n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

#**S1.5.6**(715)Unleichung von Bernoulli
#Vor:$x\in\mathbb{R}$, $x \geq -1$, $n\in\mathbb{N}$
#Beh:$(1+x)^n \geq 1+nx$

Lös:IA: n=1: $1!=1 > \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

IH: $n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ gelte für ein $n\in\mathbb{N}$

IS: $(n+1)! = \underset{\geq 0}{(n+1)}\, n! > (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \geq \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$

$$\Leftrightarrow (n+1)^2\left(\frac{n}{2}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} \geq \frac{\frac{n+1}{2}}{(n+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = (1 - \underset{\geq -1}{\frac{1}{n+1}})^n \underset{S1.5.6}{\geqslant} 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2(n+1)}$$

A1.7.14 Angeordneter Körper

$\forall$ x$\in$K, a$\geq$0, $(1+a)^n \geq \frac{n^2}{4} a^2$

Lös: $(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \underbrace{\geqslant}_{k\geqslant 2} \binom{n}{2} a^2$ da $\binom{n}{k} a^k \geq 0$ $\forall$ $0 \leq k \leq n$.

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n^2}{4}$, denn $n-1 \underbrace{\geqslant}_{n\geqslant 2} \frac{n}{2} \Leftrightarrow 2n-2 \geq n \Leftrightarrow n \geq 2$

($\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{1*2\ldots(n-2)(n-1)n}{1*2*\ldots(n-2)!2}$)