A1.6.1 Z.z.: In $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ gilt das „=" wenn $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})>0$ und $\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2})=0$

Bew: $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=$

$|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \underset{*}{\le} |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z_2}|=||z_1|+|z_2||^2$

$*$"$\Rightarrow$" $|z_1\overline{z_2}|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(z_1\overline{z_2})+\underbrace{\mathrm{Im}^2(z_1\overline{z_2})}_{=0}}=|\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})|=\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$

$*$"$\Leftarrow$" $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=|z_1\overline{z_2}|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(z_1\overline{z_2})+\underbrace{\mathrm{Im}^2(z_1\overline{z_2})}_{=0\Rightarrow\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2})=0}}$

A1.6.2 Berechne Betrag, Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen (für ein $z=x+iy\in\mathbb{C}$, für welches der Nenner verschwindet)

z^2, $1/z$, $\dfrac{1+z}{1-z}$

A1.6.3 Zeige: Für $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ kann es keine Teilmenge $\mathbb{K}_+$ geben, welche die Axiome (O1)-(o3) erfüllt, d.h. $\mathbb{C}$ kann nicht zu einem geordneten Körper gemacht werden.

A1.6.4 Zeige: Ist $z\in\mathbb{C}$, und $|z|=0$, so folgt $z=0$ (also $\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Im}\,z=0$)

A1.6.5 Zeige für $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$:

a) $(x_1x_2+y_1y_2)^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1y_2-x_2y_1)^2\le(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$

Lös: $(x_1x_2+y_1y_2)^2=x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2$,

$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1y_2-x_2y_1)^2=$

$x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-(x_1^2y_2^2-2x_1y_2x_2y_1+x_2^2y_1^2)=$

$x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+2x_1y_2x_2y_1=(x_1x_2+y_1y_2)^2 \underset{(x_1y_2-x_2y_1)^2\ge0}{\le} (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$

b) Benutze a) um zu zeigen, daß $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|\ \forall\ z_1,z_2\in\mathbb{C}$

Anleitung: Quadriere beide Seiten

Lös: $|z_1+z_2|^2=|x_1+iy_1+x_2+iy_2|^2=|x_1+x_2+i(y_1+y_2)|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=$

$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+y_1^2+2y_1y_2+y_2^2=x_1^2+y_1^2+2(x_1x_2+y_1y_2)+x_2^2+y_2^2$

$(|z_1|+|z_2|)^2=|z_1|^2+2\underbrace{|z_1||z_2|}_{\ge0}+|z_2|^2=x_1^2+y_1^2+2\underbrace{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}_{\ge0}\underbrace{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}_{\ge0}+x_2^2+y_2^2$.

Bleibt z.z. $x_1x_2+y_1y_2\le\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$.

Annahme $x_1x_2+y_1y_2>\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}\ge0\Leftrightarrow$

$(x_1x_2+y_1y_2)^2>(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$ Widerspruch zu a) $\Rightarrow$ richtig

A1.6.6 Zeige für $z\in\mathbb{C}$ und $c\in\mathbb{R}$ gilt:

a) $\mathrm{Re}\,iz=-\mathrm{Im}\,z$

b) $\overline{(z^{-1})}=(\overline{z})^{-1}$, $\overline{(cz^{-1})}=c(\overline{z})^{-1}$

A1.6.7

a) Zeige: Für reelle Zahlen a,b,c mit $a\neq 0$ und $z\in\mathbb{C}$ gilt:

$$az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, & \text{falls } 4ac\le b^2 \\ \dfrac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}, & \text{falls } 4ac> b^2 \end{cases},$$

Anleitung: Zeige zunächst $az^2+bz+c=a(z+b/2a)^2+c-b^2/4a$.

Bew: $0=az^2+bz+c=a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \Leftrightarrow a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c \Leftrightarrow$

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

1.Fall: $b^2-4ac\ge 0 \Rightarrow \frac{b^2-4ac}{4a^2}\ge 0 \Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2.Fall: $b^2-4ac<0 \Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\pm i\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}} \Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\frac{\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{\pm 2a} \Rightarrow$

$$z=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

b) Zeige: Für $z,\xi\in\mathbb{C}$ mit $z=x+iy$, $(x,y\in\mathbb{R})$ gilt:

$$z=\xi^2 \Leftrightarrow \xi=\pm\left(\sqrt{\frac{x+|z|}{2}}+i(\operatorname{sgn} y)\sqrt{\frac{-x+|z|}{2}}\right)$$

Lös: "$\Rightarrow$"

$\xi:=s+it$ mit $s,t\in\mathbb{R}$, $z=\xi^2 \Leftrightarrow z=x+iy=(s+it)^2=s^2+2ist-t^2 \Leftrightarrow x=s^2-t^2$ und $y=2st$

1.Fall: $y=0 \Leftrightarrow x=s^2-t^2$ und $(s=0$ oder $t=0) \Rightarrow x=s^2$ oder $x=-t^2 \Leftrightarrow$

$(x\ge 0$ und $s:=\pm\sqrt{x})$ oder $(x\le 0$ und $t:=\pm\sqrt{-x}) \Leftrightarrow$

$(x\ge 0$ und $\xi=\pm\sqrt{x})$ oder $(x\le 0$ und $\xi=\pm i\sqrt{-x})$

2.Fall: $y\neq 0 \Leftrightarrow x=s^2-t^2$ und $t=\left(\frac{2s}{y}\right)^{-1} \Rightarrow x=s^2-\frac{y^2}{4s^2}$ und $t=\frac{y}{2s}$

$\Leftrightarrow 4s^4-4s^2x-y^2=0$ und $t=\frac{y}{2s} \underset{u=s^2}{\Leftrightarrow} 4u^2-4uy-y^2=0$ und $t=\frac{y}{2s} \Leftrightarrow$

$$u=\frac{4x\pm\sqrt{16x^2+16y^2}}{2\cdot 4}=\frac{4x\pm 4|z|}{2\cdot 4}$$

(− kann nicht benutzt werden, da $|z|\ge|x|\ge x$ und $s=\sqrt{u}\in\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$

$s^2=u=\frac{x+|z|}{2}$ und $t=\frac{y}{2s} \Leftrightarrow s=\pm\sqrt{\frac{x+|z|^2}{2}}$ und $t=\frac{y}{2\left(\pm\sqrt{\frac{x+|z|^2}{2}}\right)} \Leftrightarrow$

$s=\pm\sqrt{\frac{x+|z|}{2}}$ und $t=\pm\frac{y\sqrt{(-x+|z|)/2}}{\pm\sqrt{\underbrace{-x^2+|z|^2}_{=y^2}}}=\pm\frac{y\sqrt{(-x+|z|)/2}}{\pm\underbrace{\sqrt{y^2}}_{|y|}}=$

$\pm(\operatorname{sign} y)\sqrt{(-x+|z|)/2} \Leftrightarrow \xi=\pm\sqrt{\frac{x+|z|}{2}}\pm i(\operatorname{sign} y)\sqrt{\frac{-x+|z|}{2}}$

"$\Leftarrow$" ausquadrieren, nachrechnen

c) Berechne alle $z\in\mathbb{C}$, für die gilt $z^3=1$. Anleitung: $z^3-1=(z-1)(...)$

Lös: $z^3-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2-z+1)=0 \Leftrightarrow z=1$ oder $z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-1\pm i\sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$

$z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ oder $z=1$ oder $z=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

A1.6.8 Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x+iy$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ dar und berechne deren Beträge:

a) i^n $(n\in\mathbb{Z})$

Lös: Beh: $i^n=\begin{cases}1 \text{ falls } n=4k\\ i, \text{ falls } n=4k+1\\ -1, \text{ falls } n=4k+2\\ -i, \text{ falls } n=4k+3\end{cases}$ mit $k\in\mathbb{Z}$, und $\begin{pmatrix}1&=1+0i\\ i&=0+1i\\ -1&=-1+0i\\ -i&=0+(-1)i\end{pmatrix}$

$i^{4k}=(i^4)^k=1^k=1$, da $i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$, $\quad i^{4k+1}=i\bullet i^{4k}=i\bullet 1=i$,

$i^{4k+2}=i^2\bullet i^{4k}=(-1)\bullet 1=-1$, $i^{4k+3}=i^3\bullet i^{4k}=i^3\bullet 1=(-1)i=-i$

Betrag: $|i^n|=1$, da $|1|=1$, $|i|=1$, $|-1|=1$ oder man benutzt

$|z^n|=|z|^n\ \forall\ n\in\mathbb{Z}$, (Bew: $n\geq 0$: Induktion nach n,

$n<0: |1/z^{-n}|=|(1/z)^{-n}|=|1/z|^{-n}=|z|^n$)

b) $(1+i)^4$

Lös: $=[(1+i)^2]^2=[(1+2i+i^2]^2=(2i)^2=2^2i^2=-4=-4+0i$,

$|(1+i)^4|=|-4|=4$

c) $\dfrac{1}{(3-i)^2}$

Lös: $=\dfrac{1}{9-6i+i^2}=\ \dfrac{1}{8-6i}\,\dfrac{8+6i}{8+6i}=\dfrac{8+6i}{8^2-(6i)^2}=\dfrac{8+6i}{100}=2/25+\dfrac{3}{50}i$

$\left|\dfrac{1}{(3-i)^2}\right|=\left|\dfrac{1}{8-6i}\right|=\dfrac{1}{|8-6i|}=1/10$

d) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$

Lös: $=\dfrac{(1+i)^5(1+i)^3}{(1-i)^3(1+i)^3}=\dfrac{(1+i)^8}{2^3}=1/8[(1+i)^4]^2=1/8(-4)^2=2=2+0i$

$\left|\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}\right|=|2|=2$

A1.6.9 Zeige:

a) Für beliebige Zahlen $z,w\in\mathbb{C}$ gilt: $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$

Bew: $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=\ (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\underbrace{\overline{\overline{z_1\overline{z_2}}}}_{=\overline{z_1\overline{z_2}}}+z_2\overline{z_2}$

$=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\ \ \forall\ \ z_1,z_2\in\mathbb{C}\ \Rightarrow$

$|z+w|^2+\underbrace{|z-w|^2}_{=|z+(-w)|^2}=(|z|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2)+(|z|^2+2\underbrace{\mathrm{Re}(z\overline{(-w)})}_{=-\mathrm{Re}(z\overline{w})}+\underbrace{|-w|^2}_{=|w|^2})=2|z|^2+2|w|^2=$

$2(|z|^2+|w|^2)\ \ \forall\ \ z,w\in\mathbb{C}$

Andere Formulierung:

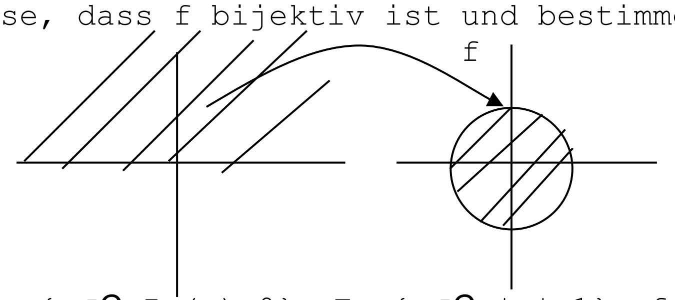
Bew: $(z+w)(\overline{z+w})+(z-w)(\overline{z-w})=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})+(z-w)(\overline{z}-\overline{w})=$

$z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{z}-w\overline{z}-z\overline{w}+w\overline{w}=2|z|^2+2|w|^2$.

A1.6.10

Gegeben sei die Funktion $f:\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>0\}\to\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$

Beweise, dass f bijektiv ist und bestimme die Umkehrfunktion.



Lös: $H:=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>0\}$, $E:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, $f:H\to E$, $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$

Nebenrechnung $w=\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{z+i-2i}{z+i}=1-\dfrac{2i}{z+i} \Leftrightarrow \dfrac{2i}{z+i}=1-w \Leftrightarrow$

$\dfrac{z+i}{2i}=\dfrac{1}{1-w} \Leftrightarrow z=\dfrac{2i}{1-w}-i=\dfrac{2i-i(1-w)}{1-w}=\dfrac{i+iw}{1-w}$

Definiere $g:E\to H$, $g(w)=\dfrac{i+iw}{1-w}=i\dfrac{1+w}{1-w}$.

Dann gilt:

(.) $f(H)\subset E$:

Es sei $z=(x+iy)\in H$, d.h. $x\in\mathbb{R}$, $y>0 \Rightarrow$

$|f(z)|^2=\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|^2=\dfrac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}=\dfrac{x^2+y^2+1-2y}{x^2+y^2+1+2y}\underbrace{<}_{y>0}1$

d.h. $f(z)\in E$

(..) $g(E)\subset H$:

Es sei $|w|<1$. Z.z $\mathrm{Im}(g(w))>0$. Es gilt:

$\mathrm{Im}(g(w))=\mathrm{Im}\left(i\dfrac{1+w}{1-w}\right)=\mathrm{Im}\left(i\dfrac{1+w}{1-w}\,\dfrac{1-\overline{w}}{1-\overline{w}}\right)\underbrace{=}_{*}\mathrm{Im}\left(i\dfrac{1-w\overline{w}+w-\overline{w}}{|1-w|^2}\right)$

$=\mathrm{Im}\left(i\dfrac{1-|w|^2+2i\,\mathrm{Im}(w)}{|1-w|^2}\right)=\dfrac{1-|w|^2}{|1-w|^2}\underbrace{>}_{|w|<1}0$

* $w=u+iv$; $(1-w)(1-\overline{w})=(1-u-iv)(1-u+iv)=(1-u)^2+v^2=|1-u-iv|^2=|1-w|^2$

(...) f surjektiv, da $\forall\ w\in E$:

$f(g(w))\ \dfrac{i\dfrac{1+w}{1-w}-i}{i\dfrac{1+w}{1-w}+i}=\dfrac{\dfrac{1+w}{1-w}-1}{\dfrac{1+w}{1-w}+1}=\dfrac{\dfrac{1+w-1+w}{1-w}}{\dfrac{1+w+1-w}{1-w}}=w$

(....) f ist injektiv, da aus $f(z_1)=f(z_2)$ für $z_1,z_2\in H$ folgt $g(f(z_1))=g(f(z_2)) \Rightarrow z_1=z_2$. Also ist f bijektiv mit Umkehrfunktion g

b) Zu jedem $z\in\mathbb{C}$ existieren eine reelle Zahl $r\geq 0$ und eine komplexe Zahl w mit $|w|=1$, sodass $z=rw$ ist. Sind r und w eindeutig bestimmt?

Lös: Definition $r:=|z|$ und $w:=\begin{cases} z/r \text{ falls } r\neq 0 \\ 1 \text{ falls } r=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $r\geq 0$ und $|w|=1$,

denn $|w|=|z/r|=|z|/|r|=r/r=1$ für $r\neq 0$, sowie $z=rw$ (Existenz z)

Eindeutigkeit:

1.Fall $z\neq 0$: Sei $r_1w_1=z=r_2w_2 \Rightarrow r_1=|r_1|=|z/w_1|=|z|/|w_1|=|z|$,

analog $r_2=|z| \Rightarrow r_1=r_2\neq 0 \Rightarrow r_1w_1=r_1w_2 \underbrace{\Rightarrow}_{r_1\neq 0} w_1=w_2$.

Also r und w sind hier eindeutig.

2.Fall $z=0$: r ist eindeutig, Beweis wie im 1.Fall.

w ist nicht eindeutig, z.B. $\underbrace{0}_{r}\cdot\underbrace{1}_{w_1}=\underbrace{0}_{r}\cdot\underbrace{(-1)}_{w_2}$

A1.6.11 Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x+iy$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ dar und berechne deren Beträge:

a) $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8+i^9+i^{10}+i^{11}+i^{12}+i^{13}+i^{14}+i^{15}}{1+i}$

b) $\left(\dfrac{2+i}{3-i}\right)^2$

c) $(1+i)^{1999}$.

A1.6.12

Bestimme zu folgenden komplexen Zahlen jeweils Real- und Imaginärteil sowie deren Betrag:

(.) $\dfrac{i-1}{i+1}$

Lös: $\dfrac{i-1}{i+1}=\dfrac{i-1}{i+1}\dfrac{-i+1}{-i+1}=\dfrac{-(1-i)^2}{1^2+1^2}=\dfrac{-(1-2i+i^2)}{2}=i \Rightarrow$

$\mathrm{Re}(\dfrac{i-1}{i+1})=0$, $\mathrm{Im}(\dfrac{i-1}{i+1})=1$, $\left|\dfrac{i-1}{i+1}\right|=1$

(..) $\dfrac{3-4i}{1-3i}$

Lös: $\dfrac{(3-4i)}{(1-3i)}\dfrac{(1+3i)}{(1+3i)}=\dfrac{3-12+13i}{1^2-3^2}=-\dfrac{9}{10}+\dfrac{13}{10}i$

$\mathrm{Re}\left(\dfrac{3-4i}{1-3i}\right)=-\dfrac{9}{10}$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{3-4i}{1-3i}\right)=\dfrac{13}{10}$, $\left|\dfrac{3-4i}{1-3i}\right|=\sqrt{\dfrac{3^2+4^2}{1^2+3^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

(...) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ für n∈**Z**.

Lös: $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow |z|=\frac{|1+i|}{|\sqrt{2}|}=\frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{2}}=1$, $|z^n|=|z|^n=1$,

$z^2=\frac{(1+i)^2}{(\sqrt{2})^2}=\frac{1+2i-1}{2}=i$, $z^3=iz=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $z^4=i^2=-1 \Rightarrow$

$z^{n+4}=-z^n \ \forall\ n\in\mathbf{Z}$, $z^{8k}=(z^8)^k=1 \Rightarrow z^{8k+\nu}=z^\nu$.

$\mathrm{Re}(z^{8k})=1$, $\mathrm{Im}(z^{8k})=0$, $\mathrm{Re}(z^{8k+1})=\mathrm{Im}(z^{8k+1})=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\mathrm{Re}(z^{8k+2})=0$, $\mathrm{Im}(z^{8k+2})=1$, $\mathrm{Re}(z^{8k+3})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{Im}(z^{8k+3})=\frac{1}{\sqrt{2}}$ und

Für $\nu=4,5,6,7$: $\mathrm{Re}(z^{8k+\nu})=-\mathrm{Re}(z^{8k+\nu-4})$, $\mathrm{Im}(z^{8k+\nu})=-\mathrm{Im}(z^{8k+\nu-4})$ für k=**Z**

A1.6.13 Bestimme alle $z\in\mathbf{C}$ mit $z^4+(2-i)z^2=2i$

Lös: $z^4+(2-i)z^2=0 \Rightarrow z^4+2z^2-iz^2-2i=0 \Rightarrow z^2(z^2+2)-i(z^2+2)=0 \Rightarrow$

$(z^2+2)(\ z^2-i)=0 \Leftrightarrow z^2+2=0$ oder $z^2-i=0 \Leftrightarrow z^2=-2$ oder $z^2=i \Leftrightarrow$

$z_{1/2}=\pm\sqrt{2}\ \sqrt{-1}$, $z_{1/2}=\pm\sqrt{2}\,i$ weil $i^2=-1$ auch $(-i)^2=-1$ oder

$z_{3/4}=\pm\sqrt{i}$, $z_{3/4}=\pm\sqrt{1}\ \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_{3/4}=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

A1.6.14 Äquivalenzrelationen?

Ggf Partion, Äquivalenzklassen, Äquvalenzklasse zu x=z=2

a) z~w genau dann, wenn $|z|=|w|$

Lös: ~ reflexiv, da $|z|=|z|$

~ symmetrisch, da $|z|=|w| \Rightarrow |w|=|z|$

~ transitiv, da $|z|=|w|$ & $|w|=|v| \Rightarrow |w|=|v|$

Äquivalenzrelation (da = Äquivalenzrelation)

Äquivalenzklasse zu 2: $\{z\in\mathbf{C}\,|\,|z|=2\}$

\# Partition: $\{z\in\mathbf{C}\,|\,|z|\in\mathbf{R}\}$

b) z~w genau dann, wenn gilt: $\exists\ \phi\in[0,2\pi)$ mit $z=w*e^{j\phi}$

Lös: ~ reflexiv, da $z \underbrace{=}_{für\ \Phi=0} z|$

~ symmetrisch da $z=w*e^{j\phi} \Rightarrow w=w*e^{j\phi}*e^{-j\phi}=z*e^{-j\phi}=z*e^{j\overbrace{(2\pi-\Phi)}^{=\Phi'\in[0,2\pi)}}=z*e^{j\phi'}$.

~ transitiv, da $z=w*e^{j\phi}$ & $w=v*e^{j\phi\Psi} \Rightarrow z=v*e^{j\Psi}e^{j\phi}=v*e^{j(\Psi+\phi)}$

Äquivalenzrelation Äquivalenzklasse zu 2: $\{z\in\mathbf{C}\,|\,|z|=2\}$

\# Partition: $\{z\in\mathbf{C}\,|\,|z|\in\mathbf{R}\}$