A1.2.1 Zeige: Aus $a<b$ folgt $a<(a+b)/2<b$

A1.2.2 Zeige: Ist $a\geq 0$, und gilt $\forall\ \varepsilon>0: a\leq\varepsilon$, so folgt $a=0$

A1.2.3 $a,b,c,d\in(K,>)$, $b,d>0$, $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ so gilt $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

Lös: $b+d>0$ und $1/b$, $1/d$, $\frac{1}{b+d}>0 \Rightarrow$

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a(b+d)<(a+c)b \Leftrightarrow ab+ad<ab+cb \Leftrightarrow ad<cb \Leftrightarrow \frac{a}{b}<\frac{c}{d} \text{ und}$$

$$\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d} \Leftrightarrow (a+c)d<(b+d)c \Leftrightarrow ad<bc \Leftrightarrow \frac{a}{b}<\frac{c}{d}.$$

Beide Ungleichungen sind äquivalent zu $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, was nach Vor richtig ist. Also folgt die Beh.

*//**A1.1.3** (303) $(K,+,*)$. $a\oplus b=a+b+2$, $a\otimes b:=2a+2b+a*b+2$,//*

// K^* : $\oplus$ und $\otimes$ …. $0=-2$, $-a=-a-4$, $1=-1$, $a^{-1}=\frac{-3-2a}{a+2}$ //

A1.2.4 Kann der Körper $(K,\oplus,\otimes)$ aus A1.1.3 angeordnet werden?

*//**D1.2.1** (400) $(K,+,*)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf K $R:=<$, Anordnungsaxiome://*

// (O3) $a<b \Rightarrow a+c<b+c\ \forall\ c\in K$, $a<b$ und $0<c \Rightarrow a*c<b*c$ //

Lös: Wir verwenden die gleichen Ordnungsrelationen wie beim ursprünglichen Körper. (O1) und (O2) gelten unverändert weiter, unabhängig von den Verknüpfungen

Zu (O3): Es seien $a,b,c\in K$ mit $a<b$

a) $a\oplus c<b\oplus c$:

$a<b \Rightarrow a+c+2<b+c+2 \Rightarrow a\oplus c<b\oplus c$

b) Wenn $c>0=-2$ dann folgt $a\otimes c<b\otimes c$:

$a<b \Rightarrow a(\underbrace{c+2}_{>0})<b(c+2)$

$\Rightarrow ac+2a<bc+2b \Rightarrow ac+2a+2c+2<bc+2b+2c+2 \Rightarrow$

$ac+2a+2c+2<bc+2b+2c+2 \Rightarrow a\otimes c<b\otimes c$

A1.2.5

a)Kann ein Körper mit 3 Elementen angeordnet werden?

//**(RR<)**(400) 4.)$a\neq 0 \Rightarrow a^2:=a\cdot a>0$, speziell $1>0,-1<0$//

*//**D1.2.1** (O2)(400)Aus $a<b$ und $b<c \Rightarrow a<c$ //*

Lös:Nein,denn:Sei K ein dreielementiger Körper $\Rightarrow$

K hat die Gestalt $\{0, 1, -1\}$, (0 und 1 liegen in jedem Körper, dazu $-0=0$ und -1, wobei $-1\neq 1$, da sonst 2 elementiger Körper)

$(1\neq 0, 1\neq -1)$.

Es gilt hier $2:=1+1=-1$, denn $1+0=1$, $1+(-1)=0$.

Wäre $1+1=1$, so $1=0$ weil auch $1+0=1$ Widerspruch bzw

$1+1=0$, so $1=-1$ da auch $1+(-1)=0$ Widerspruch $\Rightarrow$

Annahme:K kann angeordnet werden? $\Rightarrow$

$$0 \underbrace{<}_{4.)} 1=1+0 \underbrace{<}_{(O2)..0<1} 1+1=2\in K=\{0, 1, -1\} \Rightarrow 0<1<1+1=2$$

Falls $2=0 \Rightarrow 0 \underbrace{<}_{(O2)} 2=0$ Widerspruch,

Falls $2=1 \Rightarrow 1<2=1$ Widerspruch,

Falls $2=-1 \Rightarrow 0<2=-1$ Widerspruch zu Regel (4) $\Rightarrow$

Annahme falsch, also kann K nicht angeordnet werden

oder: $0<1=1+0<1+1=-1 \Rightarrow 0<-1$ Widerspruch zu (O1),

denn $0>-1$ (ausführlich steht hier $0<1$ und $1<-1$)

Bem:Kein endlicher Körper kann angeordnet werden

(Beweisidee: $0<1<2<3...<-1$ Widerspruch)

b) Beweise: Ein Körper K ist genau dann ein angeordneter Körper, wenn eine Teilmenge $P \subset K$ existiert, so dass gilt:

(P1) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der Alternativen $x=0$, $x \in P$ oder $-x \in P$.

(P2) Aus $x,y \in P$ folgt $x+y \in P$

(P3) Aus $x,y \in P$ folgt $xy \in P$

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: $\Leftrightarrow$ $\exists$ auf R:=<,Anordnungsaxiome://*
//(O1) $\forall$ a,b∈K gilt genau eine der folgenden Eigenschaften://
// a<b oder b<a oder a=b (Trichotonie) //
*//**(RR<)**(400) 2.)a>b $\Leftrightarrow$ -a<-b, speziell a>0 $\Leftrightarrow$ -a<0//*
//siehe auch D1.2.1 andere Formulierung//

Bew: "$\Rightarrow$" K angeordnet $\Rightarrow$ (P1)...(P3) gilt

Def $P:=\{x \in K : x>0\}$ $\Rightarrow$ $P \subset K$ (Menge der postiven Elemente von K) $\Rightarrow$ ...Rechne P(1)...P(3) nach.

- Zu P(1): Sei $x \in K$ beliebig. Setze $a=x$ und $b=0$ $\underbrace{\Rightarrow}_{(01)}$

  Es gilt genau eine der drei Aussagen:

• $x<0$ oder	• $0<x$ oder	• $x=0$, d.h.
• $-x>-0=0$ oder	• $x>0$ oder	• $x=0$, d.h.
• $x=0$ oder	• $x<0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{RR\ 2.)} -x>0$ oder	• $x>0$ d.h
• $x=0$ oder	• $-x>0 \in P$ oder	• $x \in P$

*//(O3)a<b $\Rightarrow$ a+c < b+c $\forall$ c∈K   a<b und 0<c $\Rightarrow$ a*c < b*c //*
//(O2)Aus a<b und b<c $\Rightarrow$ a<c (Transitivität) $\forall$ a,b,c∈K//

- Zu P(2): Seien $x,y \in P$, d.h. $x>0, y>0 \Rightarrow x=x+0 \underbrace{<}_{(O3), mit\ 0<y} y+x=x+y$

  $\underbrace{\Rightarrow}_{(O2)}$ $0<x+y$, d.h. $x+y \in P$

*//**(RR<)**(400)(.)a,b>0 d.h. a>0 und b>0 $\Rightarrow$ ab>0 //*
// (..)a>0,b<0 $\Rightarrow$ ab<0, //
// (...) a<0 und b<0 $\Rightarrow$ ab>0//

- Zu (P3): Es seien $x,y \in P \Rightarrow 0<x$ und $0<y \Rightarrow 0*y<x*y \Rightarrow x*y \in P$

"$\Leftarrow$" Sei $P \subset K$ mit (P1)-(P3) erfüllt.

Definition Relation < auf K: durch $a<b :\Leftrightarrow b-a \in P$.

Rechne jetzt (O1)-(O3) nach:

(O1) (400)a<b oder b<a oder a=b (Trichotonie)

- Zu (O1): Seien $a,b \in K$ beliebig. Mit $x:=b-a$ folgt aus (P1): Es gilt genau eine der 3 folgenden Aussagen

• $x=0$ oder	• $x \in P$ oder	• $\underbrace{-x}_{-(b-a)} \in P$, d.h.
• $b-a=0$ $(a=b)$ oder	• $a<b$ oder	• $a-b \in P$, d.h.
• $\underbrace{a=b}_{b-a=0 (Bew\ Körperax)}$ oder	• $a<b$ oder	• $b<a$

Nebenrechnung: $-(b-a)=a-b$, denn

$-x=-(b+(-a))=-b-(-a)=-b+(-(-a))=-b+a=a+(-b)=a-b$

(O2)(400)Aus a<b und b<c ⇒ a<c
(A1)(300)(a⊕b)⊕c= a⊕(b⊕c) ∀ a,b,c∈K,
(A2) a⊕0= a ∀ a∈K
(A3) a⊕(-a)=0
(A4) a⊕b = b⊕a ∀ a,b∈K

- Zu (O2):Seien a<b und b<c d.h.
  b-a∈P und c-b∈P(nach Def von <) ⇒ c-a=
  $\underbrace{(c-b)}_{x:\in P}+\underbrace{(b-a)}_{=:y\in P}$ ∈P nach (P2) $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def} <}$ a<c
  ausführlicher: Klammern werden weggelassen
  wegen (A1), c-a $\underbrace{=}_{(A2)}$ c+0-a $\underbrace{=}_{(A3).(A4)}$ $\underbrace{c+(-b)}_{=c-b}$ +b-a)

*//(O3)(400)(.)a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, (..)a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c //*
// (403)(P3)Aus x,y∈P folgt xy∈P//

- Zu (O3):(.)Sei a<b und c∈K beliebig, d.h. b-a∈P ⇒
  (b+c)-(a+c) $\underbrace{=}_{A2,A3}$ b-a∈P $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def} <}$ a+c<b+c
  (..)Sei a<b und c>0 d.h. b-a∈P und c-0∈P ⇒
  bc-ac $\underbrace{=}_{\text{Körperax, (D und Rechenr.}}$ $\underbrace{(b-a)}_{\in P}\underbrace{c}_{\in P}$ ∈P(nach (P3) ⇒
  ac<bc
  ausführlich: bc-ac=bc+(-(ac))=bc+(-a)c=
  (b+(-a))c=(b-a)c)

c)Zeige, dass ein angeordneter Körper unendlich viele Elemente haben muss.

A1.2.6 Beweise $\frac{a}{1+a}\le\frac{b}{1+b}$ für 0≤a≤b , a,b∈R.

*//(O3)(400)a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c//*
Lös:Für a=0 oder a=b ist die Beh erfüllt
Es sei 0<a<b $\underbrace{\Rightarrow}_{(O3}$ a+ab $\underbrace{<}_{(O3}$ b+ab ⇒ a(1+b)<b(1+a) $\underbrace{\Rightarrow}_{1+b>0,\ 1+a>0}$

$\frac{1}{1+a}*\frac{1}{1+b}>0$ $\underbrace{\Rightarrow}_{(O3}$ a(1+b) $\frac{1}{1+a}*\frac{1}{1+b}$ <b(1+a) $\frac{1}{1+a}*\frac{1}{1+b}$ ⇒

$\frac{a}{1+a}<\frac{b}{1+b}$

A1.2.7 Seien a,b,c,d Elemente eines angeordneten Körpers. Bestimme alle x∈K, für die gilt:

a)*: $\frac{d}{b+c} < \frac{d}{x+c} \le \frac{d}{a+c}$ (0<a<b, 0<c, d beliebig)

Lös:1. Fall d>0 ⇒ $d^{-1}>0$

$\Leftrightarrow 0< \frac{1}{b+c} < \frac{1}{x+c} \le \frac{1}{a+c} \underbrace{\Leftrightarrow}_{b,c>0 \Rightarrow b+c>0 \Rightarrow \frac{1}{b+c}>0}$ a+c≤x+c<b+c ⇔

a≤x<b(*) ⇒ a≤x<b (notwendig)

a≤x<b ⇒ (*) hinreichend

2. Fall d=0 (*) 0<0≤0 nie erfüllt für x∈K.
3. Fall d<0

(*)⇔ $\frac{1}{a+c} \le \frac{1}{x+c} < \frac{1}{b+c}$ ⇒ b<x≤a notwendig, nicht hinreichend, da a<b nie erfüllt.

b) Ist b,d>0 und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so gilt $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Bew: Es ist b+d>0 und $\frac{1}{b}, \frac{1}{d}, \frac{1}{b+d}>0$ ⇒

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ ⇔ a(b+d)<(a+c)b ⇔ ab+ad<ab+cb ⇔ ad<cb ⇒ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ und

$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ ⇔ (a+c)d<(b+d)c ⇔ ad<bc ⇔ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Beide Ungleichungen sind äquivalent zu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, was nach Vor richtig ist. Also folgt die Beh.

c)*: $x^2+(a-b)x-ab\ge 0$ (a,b≥0) $\underbrace{\Leftrightarrow}_{0<a,b,-a<0<b}$

Lös:* ⇔(x+a)(x-b)≥0 ⇔

- [(x+a)≥0 und (x-b)≥0] oder • [(x+a)≥0 und (x-b) ≤0] $\underbrace{\Leftrightarrow}_{0<a,b,-a<0<b}$
- (x≥-a und x≥b) oder • (x≤-a und x≤b) $\underbrace{\Leftrightarrow}_{0<a,b,-a<0<b}$ x≥b oder x≤-a

A1.2.8 Zeige: Für a<b<0 ist |a|>|b|>0

A1.2.9 Es seien a,b,c Elemente eines angeordneten Körpers K. Zeige:
a) aus a<b und b≤c folgt a<c

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf R:=<,Anordnungsaxiome://*
//(O2) Aus a<b und b<c ⇒ a<c ∀ a,b,c∈K//

Bew:1.Fall b=c, a<b=c d.h. a<c

2.Fall b≠c ⇒ b<c $\underbrace{\Rightarrow}_{a<b(O2)}$ a<c

b) |a+b|=|a|+|b| gilt genau dann, wenn a,b≥0 oder a,b≤0.

Bew: "⇒„Sei |a+b|=|a|+|b|..

Annahme (a<0 oder b<0) und (a>0 oder b>0) ⇒
(a<0 und b>0) oder (a>0 und b<0).
O.B.d.A.: a<0 und b>0 (sonst vertausche a und b)

$-a+b \underbrace{=}_{\text{Def } Betrag} |a|+|b|=|a+b|=\begin{cases} a+b \text{ falls } a+b>0 \\ -(a+b), \text{ falls } a+b<0 \end{cases} \Rightarrow$

$-a=a$ oder $b=-b$ ⇒ $2a=0$ oder $2b=0$ $\underset{2\neq 0}{\Rightarrow}$

$\underbrace{a=0 \text{ oder } b=0}_{\text{angeordneter Koerper}}$ Widerspruch, also Annahme falsch,

d.h. a,b≥0 oder a,b≤0

„⇐„Sei a,b≥0 oder a,b≤0.

1.Fall: a,b≥0 ⇒ a+b≥0 ⇒ $|a+b| \underbrace{=}_{Def} a+b=|a|+|b|$ $\underbrace{(-a)+(-b)}_{-(a+b)}$

2.Fall: a,b≤0 ⇒ a+b≤0

Bew: -a≥0, -b≥0 $\underbrace{\Rightarrow}_{s\,1.Fall} \underbrace{(-a)+(-b)}_{-(a+b)} \geq 0 \Rightarrow a+b\leq 0$

$|a+b| \underbrace{=}_{(a+b)\leq 0} -(a+b)=-a-b=(-a)+(-b)=|a|+|b|$

Andere Formulierung:

Bew: „⇐„Sei a≥0 und b≥0 dann gilt $|a|+|b|=\underbrace{a+b}_{\geq 0}=|a+b|$.

Wenn a≤0 und b≤0 dann $|a|+|b|=\underbrace{-a-b}_{\geq 0}=|-a-b|=|a+b|$.

“⇒„ $|x|^2=x^2$ da $x^2=(-x)^2$ (siehe auch c)

Sei $|a+b|=|a|+|b| \Rightarrow |a+b|^2=(|a|+|b|)^2=|a|^2+2\underbrace{|ab|}_{RR}+|b|^2 \Rightarrow$

$2ab=2|ab| \Rightarrow ab\geq 0$ d.h. (a≥0 und b≥0) oder wenn (a≤b und b≤0)

Hierbei wurde benutzt: $x^2=\begin{cases} x \cdot x \\ (-x)\cdot(-x) \end{cases}=|x||x|=|x|^2$

c) $a^2<b^2$ gilt genau dann, wenn |a|<|b|

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf R:=<,Anordnungsaxiome://*
// (O2) Aus a<b und b<c ⇒ a<c ∀ a,b,c∈K//
*// (O3) a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c//*

Bew: “⇒„Sei $a^2<b^2$.

1.Möglichkeit:

Annahme |a|≥|b| ⇒ $\underbrace{|a|^2}_{a^2}=a^2=|a|\cdot|a| \underset{\text{mit (O3)}}{\geq} |a|\cdot|b| \geq \underbrace{|b||b|}_{|b|^2=b^2} = b^2 \underset{(O2)}{\Rightarrow}$

$a^2\geq b^2$ Widerspruch, also Annahme falsch d.h. |a|<|b|

*//**(RR<)** (400) 2.) a>b ⇔ -a<-b, speziell a>0 ⇔ -a<0//*
// 3.) (.) a,b>0 d.h. a>0 und b>0 ⇒ ab>0 //
// (..) a>0,b<0 ⇒ ab<0, //
// (...) a<0 und b<0 ⇒ ab>0// $\underbrace{\leq}_{(O3)\, da\, |b|>0,\, |a|<|b|}$

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf R:=<,Anordnungsaxiome://*
*// (O3) a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c //*

2.Möglichkeit:

$(b-a)(b+a)=b^2-a^2>0 \underbrace{\Rightarrow}_{RR\,3.)}$ b-a>0 und b+a>0 oder b-a<0 und b+a<0 ⇒

(b>a und b>-a) oder $\underbrace{(b<a \text{ und } b<-a)}_{-b>-a \text{ und } -b>a}$ ⇒

b>|a|,insbesondere b>0, oder
-b>|a|,insbesondere -b>0, ⇒ |b|>|a|

„⇐„Sei |a|<|b| ⇒ $a^2=|a|^2=|a||a| \underbrace{\leq}_{(O3)\text{da }|a|<|b|} |a||b| \underbrace{\leq}_{(O3)da\,|b|>0,|a|<|b|}$

$|b||b|=|b|^2=b^2$ d.h. $a^2\leq|a||b|$ und $|a||b|<b^2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Vgl Teil } a} a^2<b^2$

Hierbei wurde benutzt:

$x^2=\begin{cases} x \cdot x \\ (-x) \cdot (-x) \end{cases}=|x||x|=|x|^2$ sowie

x<y,0≤z ⇒ xz≤yz (Bew:1. Fall:z=0 ⇒ xz=0≤0=yz
2. Fall: z≠0, d.h. z>0 $\underbrace{=}_{(O3)}$ xz<yz ⇒
xz≤yz)

d) $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2\geq 4ab$

*//D**1.1.1** (300/301)//*
//Menge min 2 Elemente: K //
// (K,⊕,⊗): ⇔ ∃ 2 Abbildungen ⊕: KxK→K und ⊗: KxK→K //
//(A1) (a⊕b)⊕c= a⊕(b⊕c) ∀ a,b,c∈K//
*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf K R:=<,Anordnungsaxiome://*
*//(O3)a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c //*

Bew: $(a+b)^2-4ab=(a^2+2ab+b^2)-4ab \underbrace{=}_{\text{Rechenr. in K}} a^2-2ab+b^2=(a^2+2a(-b)+(-b)^2)=$

$(a-b)^2\geq 0$ (wg $x^2>0$ ∀ $x\in K\setminus\{0\}$) $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{A1 ... mit (O3)}}$ $(a+b)^2\geq 4ab$

$0\leq(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \Rightarrow 2ab\leq a^2+b^2 \Rightarrow 4ab\leq a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$
weil $a^2+2ab+b^2\leq 2a^2+2b^2 \Rightarrow 2ab\leq a^2+b^2 \Rightarrow 0\leq a^2-2ab+b^2 \Rightarrow 0\leq(a-b)^2$

Andere Formulierung für $(a+b)^2\geq 4ab$:
⇔ $a^2+2ab+b^2\geq 4ab$ ⇔ $a^2-2ab+b^2\geq 0$ ⇔ $(a-b)^2\geq 0$. Die Aussage $(a-b)^2\geq 0$ ist aber richtig (RR im Körper) und daher auch die äquivalente Aussage $(a+b)^2\geq 4ab$

A1.2.10 Beweise: $\frac{x+y}{1+|x+y|}\leq\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}$ für x,y∈R.

*//**A1.2.6** (404)* $\frac{a}{1+a}\leq\frac{b}{1+b}$ *für 0≤a≤b , a,b∈R.//*

Bew: $\frac{x+y}{1+|x+y|}\leq\frac{\overbrace{|x+y|}^{a}}{1+\underbrace{|x+y|}_{a}} \underbrace{\leq}_{A1.2.6} \frac{\overbrace{|x|+|y|}^{b}}{1+\underbrace{|x|+|y|}_{b}}=$

$\frac{|x|}{1+|x|+|y|}+\frac{|y|}{1+|x|+|y|}\leq\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}$

A1.2.11 $(a_n)\in R$, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\in R$, $a_n\leq c\in R$ ∀ n∈N.

a) Zeige a≤c

Bew: Sei ε>0, N∈N: $|a_n-a|<\varepsilon$ ∀ n≥N ⇒ $a_n-\varepsilon<a<a_n+\varepsilon<c+\varepsilon$
Annahme a>c ⇒ a>c, a<c+ε ⇒ **0<**a-c**<**ε ∀ ε>0
$\varepsilon:=\frac{a-c}{2}>0 \Rightarrow$ **0<**a-c**<** $\frac{a-c}{2}$ …...Widerspruch!

b) $a_n := 1 - \frac{1}{n} < 1 = c \quad \forall\ n \in \mathbf{N}.$

Lös: $a_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} : a \Rightarrow a = c$