$\mathbb{K}$ Körper, zum Bsp $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $M\subset\mathbb{K}$, $M\neq\emptyset$.

1.) Für $z\in\mathbb{K}$ & $\delta>0$: $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0):=U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in\mathbb{R}\,|\,0<|z-z_0|<\delta\}$.

2.) $z_0\in\mathbb{K}$ heißt Häufungspunkt (HP) von M: $\Leftrightarrow$

$M\cap\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0)\neq\emptyset\ \forall\ \varepsilon>0 \underset{*}{\Leftrightarrow}$

$\exists\ (z_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $z_n\in M\setminus\{z_0\}$, sodass gilt: $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0 \underset{**}{\Leftrightarrow}$

In jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(z_0)$ liegen unendlich viele Punkte von M.

M' sei die Menge aller HP von M

Bew $*$: "$\Rightarrow$" $z_0\in M' \Rightarrow \forall\ \delta>0\ M\cap\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)\neq\emptyset \Rightarrow \forall\ \delta=1/n,\ n\in\mathbb{N},\ \exists\ z_n\in M\cap\overset{\circ}{U}_{1/n}(z_0) \Rightarrow$

$(z_n)\subset M\setminus\{z_0\}$ und $|z_n-z_0|<1/n \Rightarrow z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$

"$\Leftarrow$" Sei $(z_n)\subset M\setminus\{z_0\}$ mit $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0 \Rightarrow \forall\ \delta>0\ \exists\ n_0(\delta)\in\mathbb{N}$: $|z_n-z_0|<\delta\ \forall\ n\geq n_0(\delta)$

$\Rightarrow z_{n(\delta)}\in M\cap\overset{\circ}{U}_\delta(z_0) \Rightarrow \forall\ \delta>0$: $M\cap\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)\neq\emptyset \Rightarrow z_0\in M'$

$z_{n_0(\delta)}\in M\cap\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$

3.) $\overline{M}:=M\cup M'$ ist die abgeschlossene Hülle von M.
M heißt abgeschlossen
$\Leftrightarrow M=\overline{M} \Leftrightarrow M'\subset M$. # $M=\overline{M}=M\cup M' \Leftrightarrow M'\subset M$

$\underset{***}{\Leftrightarrow}$ Der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus M liegt wieder in M

$(\forall\ (z_n)_{n=1}^{\infty},\ z_n\in M,\ \lim_{n\to\infty} z_n=z_0:\ z_0\in M)$

Bew $***$:

"$\Rightarrow$" beliebiger HP $z_0\in M' \underset{M'\subset M}{\Leftrightarrow} z_0\in M \underset{2.)}{\Rightarrow}$

$\exists\ (z_n)_{n=1}^{\infty},\ z_n\in M\setminus\{z_0\}$: $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0\in M \Rightarrow$

Wahl beliebige $(z_n)_{n=1}^{\infty},\ z_n\in M\setminus\{z_0\}$: $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0\in M \Rightarrow$

Der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus M liegt wieder in M

"$\Leftarrow$" Der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus M liegt wieder in M $\Rightarrow$

Wahl beliebige $(z_n)_{n=1}^{\infty},\ z_n\in M\setminus\{z_0\}$: $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$ & $\forall\ z_0\in M \underset{2.)}{\Rightarrow}$

z_0 ist HP von M & $z_0\in M\ \forall\ z_0\in M \underset{2.)}{\Rightarrow} z_0\in M'$ & $z_0\in M\ \forall\ z_0\in M \Rightarrow$

$z_0\in M'$ & $z_0\in M\ \forall\ z_0\in M \Rightarrow M'\subset M \Rightarrow$ M heißt abgeschlossen

4.) M heißt kompakt $\Leftrightarrow$

M ist abgeschlossen und beschränkt $\underset{****}{\Leftrightarrow}$

Jede Folge aus M besitzt eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert wieder zu M gehört

$(\forall\ (z_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $z_n\in M\ \exists\ (z_{n_k})_{k=1}^{\infty}\ \lim_{k\to\infty} z_{n_k}=z\in M)$

Bew $\underset{****}{\Leftrightarrow}$: Annahme M unbeschränkt $\Rightarrow \exists\ (z_n)_{n=1}^{\infty},\ z_n\in M$: $|z_n|>n \Rightarrow$

$\forall\ (z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$: $|z_{n_k}|>n$, d.h. $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ unbeschränkt $\Rightarrow$

(z_{n_k}) divergent $\Rightarrow$ Widerspruch zu Teilfolge konvergent