6.8(3800) **Die Gamma-Funktion, Eulersche Summenformel**

D6.8.1 (3800) Sei $f:[a,b]\to \mathbb{C}$. Dann ist $f(x)=u(x)+iv(x)\ \forall\ x\in[a,b]$. Wir nennen f über [a,b] integrierbar, wenn u und v über [a,b] integrierbar sind und setzen $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u(x)dx+i\int_a^b v(x)dx$.

Bsp 6.8.1

Für $t\in\mathbb{R}_+$ und $z=x+iy\in\mathbb{C}$ ist

$f(t)=t^z=e^{(x+iy)\log t}=e^{x\log t}e^{iy\log t}=t^xe^{iy\log t}=t^x(\cos(y\log t)+i\sin(y\log t))$

Also ist per Definition für $0<\varepsilon<a$:

$\int_\varepsilon^a t^{z-1}e^{-t}dt=\cancel{\#\int_\varepsilon^a e^{((x-1)+iy)\log t}e^{-t}dt=\#}$

$\int_\varepsilon^a t^{x-1}e^{-t}\cos(y\log t)dt+i\int_\varepsilon^a t^{x-1}e^{-t}\sin(y\log t)dt$.

Beide Integrale auf der rechten Seite haben für $a\to\infty$ immer einen Grenzwert. Dagegen muss $x>0$ sein, damit auch für $\varepsilon\to 0$ ein Grenzwert existiert. Wir sagen deshalb: Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ konvergiert für $x=\mathrm{Re}\, z>0$.

D6.8.2(3800) Für $\mathrm{Re}\, z>0$ heißt die Abbildung $z\mapsto\Gamma(z)$ mit

$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ die Gamma-Funktion.

Andere Formulierung:

$\Gamma:(0,\infty)\to(0,\infty)$, mit $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ heißt Gamma-Funktion.

Bem: • $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\quad\forall\, x>0$

•• $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(n+1)=n\Gamma n=n!$

A6.8.1 Zeige durch partielle Integration, dass $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ $\forall\ z:\mathrm{Re}\, z>0$.

A6.8.2 Berechne $\Gamma(1)$ und zeige mit der vorigen Aufgabe, dass $\Gamma(n+1)=n!\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$.

S6.8.1 (3800) Eulersche Summenformel

Vor: $f\in C^1[1,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$.

Aussage: $\sum_{k=1}^{n} f(k)<\int_1^n f(t)dt+\frac{1}{2}(f(n)+f(1))+\int_1^n (t-[t]-\frac{1}{2})f'(t))dt$

Bew: $\sum_{k=1}^{k+1} f(t)*1dt=(t-k-\frac{1}{2})f(t)\Big|_k^{k+1}-\int_k^{k+1}(t-k-\frac{1}{2})f'(t)dt\ \Rightarrow\ ?????$

$\int_1^n f(t)dt=\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{2}f(k+1)+\frac{1}{2}f(k))-\sum_1^n (t-[t]-\frac{1}{2})f'(t)dt$

Bsp: • $f(t)=\frac{1}{t}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}=\log n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}-\int_1^n (t-[t]-\frac{1}{2}]\frac{1}{t^2}dt=\log n+\gamma+O(\frac{1}{2})$

• • $\log n!=\sum_{k=1}^{n}\log k$, $f(t)=\log t$

$$=n\log(n)-n+1+\frac{1}{2}\log(n)+\underbrace{\int_1^n(t-[t]-\frac{1}{2})\frac{1}{t}dt}_{\to\tilde{c}}$$

$$=n\log(n)-n+\frac{1}{2}\log(n)+\tilde{c}+O(\frac{1}{2})$$

Die Konstante $\tilde{c}=\log\sqrt{2\pi}$

Stirlingsche Formel: $n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,(1+O(\frac{1}{n})$

und $\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^\infty (e^{-t}t^{x-1}\log t)dt$, $n\in N$, insbesondere ist $\Gamma''(x)>0$ und somit die Γ Funktion strikt konvex.