Oft sucht man den Grenzwert eines Quotienten f(x)/g(x). wobei sowohl Zähler und Nenner gegen 0 gehen, also sozusagen der Grenzwert von der unbestimmten Form 0/0 ist. Hierzu kann man manchmal die sogenannte l'Hospitalsche Regel verwenden. Beachte, dass man in manchen Beispielen die Regel auch mehrmals anwenden kann, falls der Grenzwert des Quotienten der 1. Ableitungen wieder von der unbestimmten Form 0/0 ist

S5.2.9 (2850)

1.)Grenzwertregel von de l'Hospital

Vor:Sei $-\infty \underset{!}{\le} a \underset{!}{<} b \underset{!}{\le} \infty$, $I=[a,b)\subset \mathbb{R}$,

Funktionen $f,g:I\to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf I und $g'(x)\neq 0 \ \forall\ x\in I$.

$\exists\ \lambda:=\lim\limits_{x\to b_-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beh: Gilt • $\lim\limits_{x\to b_-} f(x)=\lim\limits_{x\to b_-} g(x)=0$ (• $b<\infty$, •• $b=\infty$) oder

•• $\lim\limits_{x\to b_-}|g(x)|=\infty$ #(f(x) egal)#

so $\exists\ \lim\limits_{x\to b_-}\frac{f(x)}{g(x)}$ mit $\lim\limits_{x\to b_-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda=\lim\limits_{x\to b_-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Bem: Entsprechende Aussage gilt auch auf (a,b] für $x\to a_+$

//**S5.2.4**(2803)Erweiterter Mittelwertssatz der Differentialrechnung//

//Vor:(.)a<b, $f,g: [a,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig auf [a,b] und differenzierbar//

// auf(a,b). //

// (..)$g(b)-g(a)\neq 0$ und $g'(x)\neq 0 \ \forall\ x\in(a,b)$,//

//Beh:Gilt (.)so $\exists\ \xi\in(a,b)$: $f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a))$.

// Gilt zusätzlich (..) so folgt $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.//

Bew:•• !: $f(b):=0$, $g(b):=0$.

f,g stetig auf [a,b] und differenzierbar auf (a,b) $\underset{S5.2.4}{\Rightarrow}$

$\forall\ x\in(a,b)\ \exists\ \xi=\xi_x\in(x,b)$: $\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\ \underset{\text{Wenn } x\to b, \text{auch } \xi\to b}{\to}\ \underset{x\to b_-}{\to}\ \lambda$

//**S5.1.6** (2750)

//2.) Vor:Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in \overset{o}{A}$, $f(z_0)\in\overset{o}{B}$, und sei

// $g:B\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.

// Beh: $g\circ f:A\to\mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$

••• !: $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. # $b\to\infty$, $\frac{1}{b}\to 0$#

Sei O.B.d.A. a>0, $\underbrace{f(1/x)}_{F(x)}$, $\underbrace{g(1/x)}_{G(x)}$ auf $(0,\frac{1}{a}]$,

$\frac{d}{dx}f(1/x)\underset{S5.1.6}{=}f'(1/x)(-\frac{1}{x^2})$, $\frac{d}{dx}g(1/x)=g'(1/x)(-\frac{1}{x^2})$,

$x\to 0_+$: $F(0):=0$, $G(0):=0$ $\Rightarrow$

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(0)}{G(x)-G(0)}\underset{S5.2.4}{=}\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f'\left(\frac{1}{\xi}\right)\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{\xi}\right)\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)}=\frac{f'\left(\frac{1}{\xi}\right)}{g'\left(\frac{1}{\xi}\right)},\quad 0<\xi_x<x\ \Rightarrow$$

$$\frac{f(1/x)}{g(1/x)}=\frac{f'\left(\frac{1}{\xi}\right)}{g'\left(\frac{1}{\xi}\right)}\underset{x\to 0_+}{\to}\lambda,\quad \text{d.h. } \frac{f(x)}{g(x)}\underset{x\to\infty}{\to}\lambda$$

#eigener Versuch ????

●●● $\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. # In $\underbrace{[a,b)}_{Vor}$: $b\to\infty$, $1/b\to 0$#

O.B.d.A. $a>0$, $\tilde{x}=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $x=\frac{1}{\tilde{x}}$, $a\le x\le\infty$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{a}\ge\tilde{x}>0$ oder $\tilde{x}\in(0,1/a]$

$\Rightarrow$ $\tilde{x}\to 0_+$, $\underbrace{f(1/\tilde{x})}_{F(\tilde{x})}$, $\underbrace{g(1/\tilde{x})}_{G(\tilde{x})}$, $F(0):=0$, $G(0):=0$,

$\frac{d}{dx}f(1/\tilde{x})=f'(1/\tilde{x})(-\frac{1}{\tilde{x}^2})$, $\frac{d}{dx}g(1/\tilde{x})=g'(1/\tilde{x})(-\frac{1}{\tilde{x}^2})$,

#

$$\frac{F(\tilde{x})}{G(\tilde{x})}=\frac{F(\tilde{x})-F(0)}{G(\tilde{x})-G(0)}=\frac{F'(\xi_{\tilde{x}})}{G'(\xi_{\tilde{x}})}=\frac{f'\left(\frac{1}{\xi_{\tilde{x}}}\right)\left(-\frac{1}{\xi_{\tilde{x}}^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{\xi_{\tilde{x}}}\right)\left(-\frac{1}{\xi_{\tilde{x}}^2}\right)}=\frac{f'\left(\frac{1}{\xi}\right)}{g'\left(\frac{1}{\xi}\right)},\quad 0<\xi_{\tilde{x}}<\tilde{x}\ \Rightarrow$$

$$\frac{f(1/\tilde{x})}{g(1/\tilde{x})}=\frac{f'\left(\frac{1}{\xi_{\tilde{x}}}\right)}{g'\left(\frac{1}{\xi_{\tilde{x}}}\right)}\to\lambda,\quad \tilde{x}\to 0_+,\ \text{d.h.}\ \frac{f(x)}{g(x)}\underset{x\to\infty}{\to}\lambda$$

//**S5.2.5**(2804) Monotonie und Ableitung//
//Vor:Sei I ein Intervall mit Endpunkten a,b ($-\infty\le a<b\le\infty$). //
// $f:I\to\mathbb{R}$ sei stetig auf I und differenzierbar auf (a,b).//
//Beh: 3.)$f'>0$ bzw. $f'<0$ auf (a,b) ⇒ //
//   f streng monoton wachsend bzw. fallend auf I.//
//**S5.2.8** (2808)Zwischenwertsatz von Darboux für Ableitungen//
//Vor:Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ differenzierbar auf I. //
//   Sei $a<b$, $a,b\in I$ und $f'(a)\neq f'(b)$.//
// Beh:$\forall\ \eta: f'(a)\le\eta\le f'(b)\ \exists\ \xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=\eta$.//
//**S5.2.4**(2803)Erweiterter Mittelwertssatz der Differentialrechnung//
//Vor:(.)$a<b$, $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig auf [a,b] und differenzierbar//
//   auf(a,b). //
//   (..)$g(b)-g(a)\neq 0$ und $g'(x)\neq 0\ \forall\ x\in(a,b)$,//
//Beh:Gilt (.)   so $\exists\ \xi\in(a,b): f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a))$.
//   Gilt zusätzlich (..) so folgt $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.//
//**S5.2.3**(2803)(Mittelwertsatz der Differentialrechnung)//
//Vor:$a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig auf [a,b] und differenzierbar auf (a,b)//
//Beh: ∃ mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$//

●● $|g(x)|\to\infty,\ g'(x)\underbrace{\neq}_{Vor}0\ \forall\ a<x<b\ \underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.8}\ g'(x)>0 \vee g'(x)<0\ \forall\ a<x<b$

Sonst würde mindesten 1 Nulldurchgang passieren

ObdA sei $g'(x)>0\ \forall\ a<x<b\ \underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.5}\ g\uparrow \overbrace{\underbrace{\to}_{x\to b\_}}^{Vor}\infty \Rightarrow \exists\ x_0\in(a,b): g(x)>0\ \forall\ x_0<x<b$

(Falls g negativ, $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit -1 erweitern)

$\forall\ \varepsilon>0$ fest gewählt $\exists\ b_\varepsilon$ (nahe an b) $\in(a,b)$ sodass

$\forall\ x;\ b_\varepsilon\le x<b: \frac{f(x)-f(b_\varepsilon)}{g(x)-g(b_\varepsilon)} \underbrace{\overset{\xi\in(b_\varepsilon,x)}{=}}_{S5.2.4} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\in(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)\Rightarrow$

$\lambda-\varepsilon<\frac{f(x)-f(b_\varepsilon)}{g(x)-g(b_\varepsilon)}<\lambda+\varepsilon\ \forall\ x: b_\varepsilon\le x<b\ \underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.4}\ g(x)-g(b_\varepsilon)=g'(\eta)(x-b_\varepsilon)$ für $\eta\in(b_\varepsilon,x)$,

$b_\varepsilon<x<b$ mit passenden $\xi=\xi_x\in(b_\varepsilon,x)$

$\Rightarrow g(x)-g(b_\varepsilon)>0\ \forall\ x: b_\varepsilon\le x<b \Rightarrow$

$(g(x)-g(b_\varepsilon))(\lambda-\varepsilon)<f(x)-f(b_\varepsilon)<(\lambda+\varepsilon)(g(x)-g(b_\varepsilon))\ \underbrace{\overset{b_\varepsilon \text{ nahe genug an } b<x<b}{\Rightarrow}}_{g(x)>0}$

$(\lambda-\varepsilon)(1-\frac{g(b_\varepsilon)}{g(x)})+\frac{f(b_\varepsilon)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}<(\lambda+\varepsilon)(1+\frac{g(b_\varepsilon)}{g(x)})+\frac{f(b_\varepsilon)}{g(x)}\ \forall\ x: b_\varepsilon\le x<b \Rightarrow$

$\exists\ b_\varepsilon^*,\ b_\varepsilon^*<x<b$:

$(\lambda-\varepsilon)(1-\underbrace{\frac{g(b_\varepsilon^*)}{g(x)}}_{\to 0})+\underbrace{\frac{\overbrace{f(b_\varepsilon^*)}^{\in(-\infty,+\infty)}}{g(x)}}_{\to+\varepsilon\ oder\ -\varepsilon}<\frac{f(x)}{g(x)}<(\lambda+\varepsilon)(1+\underbrace{\frac{g(b_\varepsilon^*)}{g(x)}}_{\to 0})+\underbrace{\frac{\overbrace{f(b_\varepsilon^*)}^{\in(-\infty,+\infty)}}{g(x)}}_{\to+\varepsilon\ oder\ -\varepsilon}\ \forall\ x: b_\varepsilon\le x<b \Rightarrow$

$\lambda-2\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<\lambda+2\varepsilon\ \forall\ x: b_\varepsilon^*<x<b$ für ein $b_\varepsilon^*\in(b_\varepsilon,b) \Rightarrow$

Zu $2\varepsilon<0\ \exists\ b_\varepsilon^*\in(a,b)$ mit $\frac{f(x)}{g(x)}\in(\lambda-2\varepsilon,\lambda+2\varepsilon)\ \forall\ x\in(b_\varepsilon^*,b) \Rightarrow \lim\limits_{x\to b\_}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$

Andere Formulierungen frei nach einem Beweisarchiv im Internet:

1.)Vor: a<b, $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar,

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0,\ \exists\ \lambda:=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aussage: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

*//**D4.3.1'**(2400)//*

//Eine Funktion $f:D\to\mathbb{C}$, heißt stetig in einem Punkt $z_0\in D$, wenn // $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ ($\lim_{z\to z_0}$ existiert), d.h.//

//„$z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z_0$" $\Rightarrow$ $f(z_n)\underbrace{\to}_{n\to\infty} f(z_0)$ oder $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(\lim_{z\to z_0} z)$//

//**S5.2.4**(2803) Erweiterter Mittelwertssatz der Differentialrechnung//

//Vor:(.)a<b, $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig auf [a,b] und differenzierbar //

// auf(a,b). //

// (..)$g'(x)\neq0\ \forall\ x\in(a,b) \Rightarrow g(b)-g(a)\neq0 \Rightarrow g(b)\neq g(a)$//

//Beh:Gilt (.) so $\exists\ \xi\in(a,b)$: $f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a))$./

// Gilt zusätzlich (..) so folgt $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.//

Bew:# $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\wedge$ $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x) \underbrace{=}_{D4.3.1} f(a)=g(a)=0$

$\exists\ \lambda:=\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)} \Rightarrow \lim_{z_n\to a}(g'(z_n))\neq0\ \forall\ z_n\in \overset{o}{U}\varepsilon(a) \Rightarrow$

$\exists\ \varepsilon>0,\ a<z_n<a+\varepsilon$: $g'(z_n)\neq0\ \forall\ z_n\in(a,b] \underbrace{\Rightarrow}_{0<h<\varepsilon}$

f,g stetig auf [a,a+h], diffb auf (a,a+h), $g'(z_n)\neq0$ auf (a,a+h)

$\underbrace{\Rightarrow}_{Vor\ S5.2.4\ erfüllt}$ $\forall$ h, 0<h<ε $\exists$ z_h, $a<z_h<a+h$: $\frac{f'(z_h)}{g'(z_h)}=\frac{f(a+h)-\overbrace{f(a)}^{=0}}{g(a+h)-\underbrace{g(a)}_{=0}}=\frac{f(a+h)}{g(a+h)} \underbrace{\Rightarrow}_{h\to0\Rightarrow z_h\to a}$

$\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\lim_{h\to0}\frac{f'(z_h)}{g'(z_h)}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

#2.) Vor: $a\in\mathbb{R}$; $f,g: (a,b)\to\mathbb{R}$; f,g stetig und differenzierbar auf (a,b),

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=+\infty$, $\exists \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda$.

#Aussage: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda$

*//**S1.2.1**(406) Vor: K sei angeordneter Körper und a,b∈K//*

//● Beh: 3.) $|ab|=|a||b|$

//● 4.)(.) $b\neq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right|$

//● 6.) $|a+b|\leq|a|+|b|$ (Dreiecksungleichung)//

//**S5.2.4**(2803) Erweiterter Mittelwertssatz der Differentialrechnung//

//Vor:(.) $a<b$, $f,g: [a,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar //

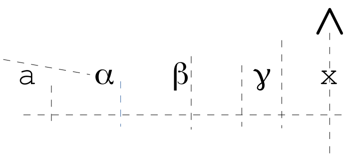
// auf(a,b). //

// (..) $g'(x)\neq 0 \ \forall\ x\in(a,b) \Rightarrow g(b)-g(a)\neq 0 \Rightarrow g(b)\neq g(a)$//

//Beh:Gilt (.) so $\exists\ \xi\in(a,b)$: $f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a))$./

// Gilt zusätzlich (..) so folgt $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.//

#Bew: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \alpha>a$: $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\lambda\right| \underbrace{<}_{x>\alpha>a} \frac{\varepsilon}{4}$. $\exists\ \beta>\alpha: g(x) \underbrace{>}_{g(x)\to\infty} g(\alpha)\ \forall\ x>\beta$.



Sei $h:(\beta,\infty)\to\mathbb{R}$: $h(x)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{\underbrace{g(x)-g(\alpha)}_{\neq 0}}$.

$b\to\infty$

$\forall\ x>\beta$: $h(x)-\lambda=\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}-\lambda=\frac{f(x)-f(\alpha)-\lambda*g(x)+\lambda*g(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=$

$\frac{f(x)-\lambda*g(x)+\lambda*g(\alpha)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\lambda+\frac{\lambda*g(\alpha)-f(\alpha)}{g(x)}}{1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}} \Rightarrow$

$\frac{f(x)}{g(x)}-\lambda=(h(x)-\lambda)\left(1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}\right)+\frac{f(\alpha)-\lambda*g(\alpha)}{g(x)} \underbrace{\Rightarrow}_{S1.2.1}$

$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\lambda\right|\leq|(h(x)-\lambda)|\left|\left(1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}\right)\right|+\frac{|f(\alpha)-\lambda*g(\alpha)|}{|g(x)|} \underbrace{\rightarrow}_{\substack{g(x)\to+\infty\\ x\to+\infty}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left|1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}\right|=1<2$ und $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|f(\alpha)-\lambda*g(\alpha)|}{|g(x)|}=0<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$\exists\ \gamma>\beta$: $\left|1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}\right|<2\ \forall\ x>\gamma$, $\exists\ \delta>\beta$: $\frac{|f(\alpha)-\lambda*g(\alpha)|}{|g(x)|}<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall\ x>\delta \Rightarrow$

$\exists\ x_m=\max\{\gamma,\delta\}$: $\left(\left|1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}\right|<2\right.$ <u>und</u> $\frac{|f(\alpha)-\lambda*g(\alpha)|}{|g(x)|}<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall\ x>x_m \underbrace{\Rightarrow}_{x>x_m}$

$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\lambda\right|\leq|(h(x)-\lambda)|\underbrace{\left|1-\frac{g(\alpha)}{g(x)}\right|}_{<2}+\underbrace{\frac{|f(\alpha)-\lambda*g(\alpha)|}{|g(x)|}}_{<\frac{\varepsilon}{2}}<|h(x)-\lambda|*2+\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$|h(x)-\lambda|=\left|\frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}-\lambda\right| \underbrace{\overset{\alpha<\xi<x}{=}}_{S5.2.4} \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-\lambda\right|<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0$: $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\lambda\right|<|h(x)-\lambda|*2+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{4}*2+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\ \forall\ x>x_m$

Bem: • Gilt auch für $b=\infty$, im Bew statt $g(x) \underset{x\to b_-}{\rightrightarrows} \infty$, $g(x) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} \infty$.

•• Gilt auch für $\lim_{x\to b} |g(x)| = +\infty$, wegen $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)(-1)}{g(x)(-1)}$

Bsp:1.) $I=(0,\infty)$, $\lim_{x\to 0_+} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lambda = 1$

Mit PR: $\log(1+x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \dots}{x} = 1 - x/2 + \dots \underset{x\to 0}{=} 1$

2.) $\alpha>0$, $\lim_{x\to 0_+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} \underset{*}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0_+} (-\frac{1}{\alpha} x^\alpha) = 0 = \lambda$,

* damit wird das = ok

3.) $\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x} \underset{*}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{\cos x}{1} = 1 = \lambda$ *

$\lim_{x\to 0_+} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0_+} \frac{-\sin x}{6x} =$ (Nochmal ableiten) $\lim_{x\to 0_+} = \frac{-\cos}{6} = -1/6$

-1/6

$\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\cos x - 1}{3x^2} =$

(nochmals differenzieren...Satz dann erfüllt) $\lim_{x\to 0_+} \frac{-\sin x}{6x} \underset{1.\text{Bsp}}{=} -1/6$

PR: $\frac{\sin x - x}{x^3} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1-3}}{(2\nu+1)!} - x = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1-3}}{(2\nu+1)!} =$

$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2(\nu-1)}}{(2\nu+1)!} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} \frac{x^{2\mu}}{(2\mu+3)!} \Big|_{x=0} = -1/6 =$

$$\begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^3}, & x \neq 0 \\ -1/6, & x = 0 \end{cases}$$

4.) $\lim_{x\to\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1)$, $a>1$ (es genügt $a>0$) $= \lim_{x\to\infty} \frac{(a^{\frac{1}{x}} - 1)}{1/x} \underset{*}{=}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{x}} \log a (-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \log a$$

5.) Vorbetrachtung: $a^x = e^{x\log a} \to 0$ für $0<a<1$ $\to 1$: $a=1$. $a^x = e^{x \log a}$ ↗ für $x \nearrow \infty$, $a>1$

$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^k}$ ($k\in\mathbb{N}$, $a>1$) $\underset{*}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \log a}{kx^{k-1}} \underset{*}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{a^x (\log a)^k}{k!} = \infty = \lambda$

$\lim_{x\to 0_+} x^x = \lim_{x\to 0_+} e^{x\log x} = e^0 = 1$ $(I=(0,\infty))$

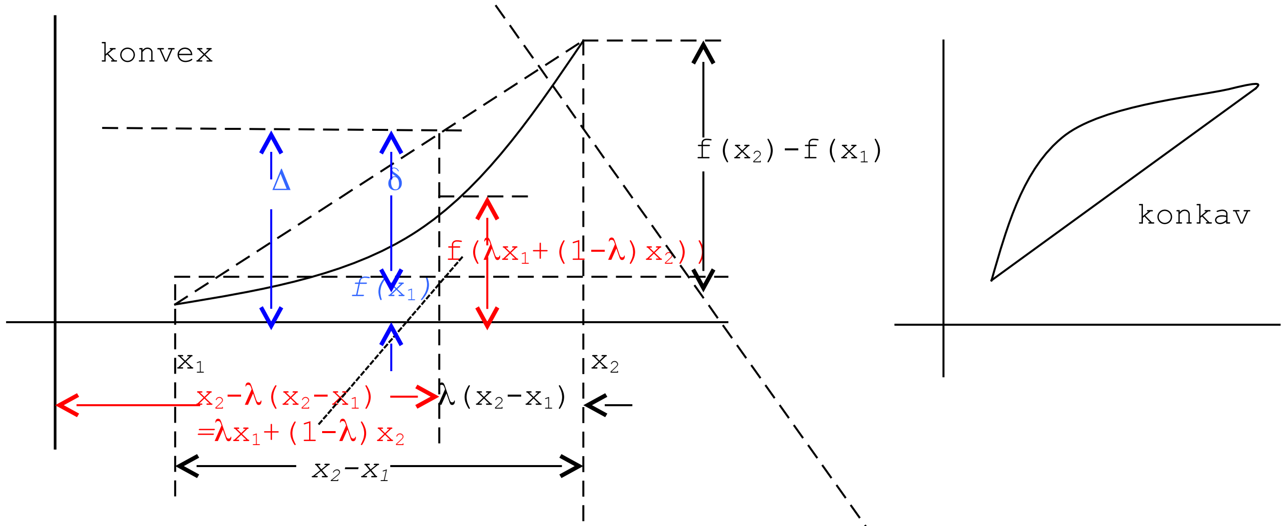
$(-\infty,\infty)$, $\underbrace{f(x)}_{\to\infty} - \underbrace{g(x)}_{\to\infty}$, $x\to b_-$, $\frac{\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)}{\underbrace{1/f(x)}_{\to 0}}$ ...dann S5.2.8 anwenden????

A5.2.9 Berechne $\lim\limits_{x\to 0}$ (sin x)/x

A5.2.10 Berechne $\lim\limits_{x\to 0}$ ((sin x/x)-1/x)

A5.2.11 Finde ein Beispiel dafür, dass die 1. l'Hospitalsche Regel falsch wird, wenn wir die Voraussetzung $\lim\limits_{x\to b_-} f(x)=\lim\limits_{x\to b_-} g(x)=0$ fallen lassen

D5.2.2 (2856)Sei $I\subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f:I\to \mathbb{R}$ heißt konvex bzw. konkav auf I:⇔ $\forall\ x_1,x_2\in I,\ x_1<x_2$ und $\forall\ 0<\lambda<1$ gilt
$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ bzw
$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$. Gilt stets „<„ bzw. „>„, so heißt f streng konvex bzw streng konkav auf I.



$$\frac{\delta}{f(x_2)-f(x_1)}=\frac{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-x_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \Delta=\delta+f(x_1)=\frac{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-x_1}{x_2-x_1}(f(x_2)-f(x_1))+f(x_1)=$$
$$\frac{(1-\lambda)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}(f(x_2)-f(x_1)+f(x_1)=(1-\lambda)(f(x_2)-f(x_1))+f(x_1)=(1-\lambda)f(x_2))+\lambda f(x_1)$$

Bsp: $f(x)=|x|$ auf $I:=\mathbb{R}$.

S5.2.10(2857) Konvexität

Vor:Sei $I\subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a<b$ und $f:I\to \mathbb{R}$ stetig auf I.

Beh:1.)Ist f auf (a,b) differenzierbar so gilt:

(.)f konvex auf I $\Leftrightarrow$ $f'\nearrow$ auf (a,b)

(..)f konkav auf I $\Leftrightarrow$ $f'\searrow$ auf (a,b)

(...)f' streng monoton $\nearrow$ ($\searrow$)auf (a,b) $\Rightarrow$
f streng konvex (konkav) auf I.

2.)Ist f auf (a,b) 2 mal differenzierbar, so gilt:

(.)f konvex auf I $\Leftrightarrow$ $f''\geq 0$ auf (a,b)

(..)f konkav auf I $\Leftrightarrow$ $f''\leq 0$ auf (a,b)

(...)$f''>0(<0)$ auf (a,b) $\Rightarrow$ f streng konvex(konkav) auf I.

//**S5.2.3**(2803)(Mittelwertsatz der Differentialrechnung)//

//Vor:$a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b)//

//Beh: $\exists$ mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$//

Bew:1.)(.) siehe auch S5.2.11 3.)

„$\Rightarrow$"Sei f konvex auf I. Sei $a<x<y<b$, $x<t<u<y$, f konvex $\Rightarrow$

$$\frac{f(x)-f(t)}{\underbrace{x-t}_{t\to x_+}}\leq\frac{f(t)-f(u)}{t-u}\leq\frac{f(u)-f(y)}{u-y}\Rightarrow f'(x)\leq\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq f'(y)$$

"$\Leftarrow$" Sei $f'\nearrow$auf I. Wähle beliebig $x<y<z$, $x,y,z\in I$ $\Rightarrow$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\underset{S5.2.3}{=}f'(\xi),\ x<\xi<y.$$

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z}=f'(\eta),\ \xi<y<\eta\Rightarrow f'(\xi)\underset{(<)}{\leq}f'(\eta)\Rightarrow \#\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\underset{(<)}{\leq}\frac{f(y)-f(z)}{y-z}\#$$

$\underbrace{\Rightarrow}_{Bem1.)}$ konvex

S5.2.11 (2858) Für eine Funktion $f:I\to\mathbb{R}$, $\forall\ x_1,x_\lambda,x_2\in I$, $x_1<x_\lambda<x_2$ gilt:

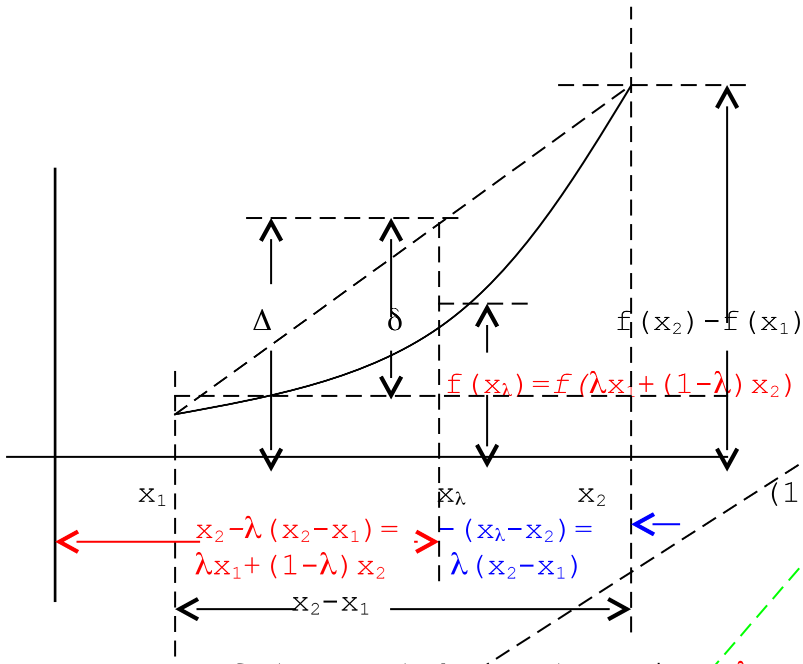
1.) ● $f:I\to\mathbb{R}$ ist auf I konvex (streng konvex) ⇔

$\forall\ x_1,x_\lambda,x_2\in I,\ x_1<x_\lambda<x_2$ gilt $\dfrac{f(x_\lambda)-f(x_1)}{x_\lambda-x_1}\underset{(<)}{\leq}\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ⇔

$\forall\ x_1,x_\lambda,x_2\in I,\ x_1<x_\lambda<x_2$ gilt $\dfrac{f(x_1)-f(x_\lambda)}{x_1-x_\lambda}\underset{(<)}{\leq}\dfrac{f(x_\lambda)-f(x_2)}{x_\lambda-x_2}$.

Analog für konkave Funktionen

Bew: konvex



$\lambda:=\dfrac{x_\lambda-x_2}{x_1-x_2}=\dfrac{x_2-x_\lambda}{x_2-x_1}$

$x_\lambda-x_2=-(x_2-x_\lambda)=-\lambda(x_2-x_1)$
$=\lambda(x_1-x_2)$

$\dfrac{\delta}{f(x_2)-f(x_1)}=\dfrac{x_\lambda-x_1}{x_2-x_1}$ ⇔

$\delta=\dfrac{x_\lambda-x_1}{x_2-x_1}(f(x_2)-f(x_1))$
$=(1-\lambda)(f(x_2)-f(x_1))$

$\Delta=\delta+f(x_1)=$
$=(1-\lambda)f(x_2)-f(x_1)+\lambda f(x_1)+f(x_1)=$
$(1-\lambda)f(x_2)+\lambda f(x_1)$

$x_1<x_\lambda<x_2$, f (streng) konvex). Sei $x_\lambda=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ ⇒

$x_\lambda-x_2=\lambda(x_1-x_2)$ ⇒ $\lambda=\dfrac{x_\lambda-x_2}{x_1-x_2}$ und $1-\lambda=1-\dfrac{x_\lambda-x_2}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1-x_2-(x_\lambda-x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{x_\lambda-x_1}{x_2-x_1}$.

$f(x_\lambda)\underset{(<)}{\leq}\Delta=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ ⇔ $f(x_\lambda)\underset{(<)}{\leq}\dfrac{x_2-x_\lambda}{x_2-x_1}f(x_1)+\dfrac{x_\lambda-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$ ⇔

$f(x_\lambda)-f(x_1)\underset{(<)}{\leq}\dfrac{x_2-x_\lambda}{x_2-x_1}f(x_1)-\underbrace{\dfrac{x_2-x_1}{x_2-x_1}}_{=1}f(x_1)+\dfrac{x_\lambda-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$ ⇔

$f(x_\lambda)-f(x_1)\underset{(<)}{\leq}\dfrac{x_2-x_\lambda-x_2+x_1}{x_2-x_1}f(x_1)+\dfrac{x_\lambda-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)=\dfrac{x_\lambda-x_1}{x_2-x_1}(-f(x_1))+\dfrac{x_\lambda-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$ ⇔

$f(x_\lambda)-f(x_1)\underset{(<)}{\leq}\dfrac{x_\lambda-x_1}{x_2-x_1}(f(x_2)-f(x_1))$ ⇔ $\dfrac{f(x_\lambda)-f(x_1)}{x_\lambda-x_1}\underset{(<)}{\leq}\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Analog $f(x_\lambda)\underset{(<)}{\leq}\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ ⇔

$(\lambda-1)f(x_\lambda)+f(x_\lambda)\underset{(<)}{\leq}\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)+(\lambda-1)f(x_\lambda)=$
$\lambda f(x_1)+(1-\lambda)(f(x_2)-f(x_\lambda))$ ⇔

$\lambda(f(x_\lambda)-f(x_1))\underset{(<)}{\leq}(1-\lambda)(f(x_2)-f(x_\lambda))$ ⇔

$\dfrac{x_2-x_\lambda}{x_2-x_1}(f(x_\lambda)-f(x_1))\underset{(<)}{\leq}\dfrac{x_\lambda-x_1}{x_2-x_1}(1-\lambda)(f(x_2)-f(x_\lambda))$ ⇔

$(x_2-x_\lambda)(f(x_\lambda)-f(x_1))\underset{(<)}{\leq}(x_\lambda-x_1)(f(x_2)-f(x_\lambda))$.

● ● Aus ● ⇒ Monotonie und Beschränktheit der Differenzenquotienten ⇒

$\forall\ y\in\mathring{I}\ \exists\ f'_-(y)\leq f'_+(y)$????

//**5.1.1** *(2700) Bem: Wir schreiben $f\in C(I)$, falls $f:I\to R$ stetig ist.*//

//**S5.2.11** (2858) Für eine Funktion $f:I\to R$, $\forall\, x_1,x_\lambda,x_2\in I,\ x_1<x_\lambda<x_2$ gilt:

//1.) ● $f:I\to R$ ist auf I konvex(streng konvex) ⇔//

// $\forall\, x_1,x_\lambda,x_2\in I,\ x_1<x_\lambda<x_2$ gilt $\dfrac{f(x_\lambda)-f(x_1)}{x_\lambda-x_1}\underset{(<)}{\leq}\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ⇔ //

// $\forall\, x_1,x_\lambda,x_2\in I,\ x_1<x_\lambda<x_2$ gilt $\dfrac{f(x_1)-f(x_\lambda)}{x_1-x_\lambda}\underset{(<)}{\leq}\dfrac{f(x_\lambda)-f(x_2)}{x_\lambda-x_2}$.//

2.) f ist konvex ⇒

$f\in C(\overset{\circ}{I})$ und alle einseitigen Ableitungen existieren auf $\overset{\circ}{I}$

Bew: f ist konvex $\underset{x<y<z}{\Rightarrow}$ $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\overset{x_1=x<x_\lambda=y<x_2=z}{\underset{(<)}{\leq}}\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$ ⇒

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\underset{(<)}{\leq}\dfrac{f(x+h')-f(x)}{h'}$ für $0<h'<h$, d.h., die rechtsseitigen Differenzenquotienten sind monoton fallend für $h\searrow 0$ und sind alle nach unten durch jeden linksseitigen Differenzenquotienten beschränkt (falls $x\in\overset{\circ}{I}$). Also existiert $f'_+(x)$, analog für $f'_-(x)$. Insbesondere ist damit $f\in C(\overset{\circ}{I})$.

//**5.1.1** *(2700) //*

//(…)f ist n mal stetig diffb auf I (kurz:$f\in C^n(I)$), falls f //

// n mal diffb ist $\forall$ $x\in I$ und $f^{(n)}:I\to R$ stetig auf I ist.//

//Bem: Wir schreiben $f\in C(I)$, falls $f:I\to R$ stetig ist.//

3.)Vor: I=[a,b], $f\in C(I)$, f diffb in $\overset{\circ}{I}$//

Aussage: f ist (strikt)konvex auf I ⇔ f′ ↗(↑) auf(a,b).//

Insbesondere ist für $f\in C^2([a,b])$ die Bedingung $f''(x)\geq 0$, $x\in(a,b)$, hinreichend für (strikte) Konvexität auf [a,b]//

//**D5.2.2**(2857) Sei $I\subset R$ ein Intervall. Eine Funktion $f:I\to R$ heißt//

// konvex bzw. konkav auf I:⇔ $\forall$ $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$ und $\forall$ $0<\lambda<1$ gilt//

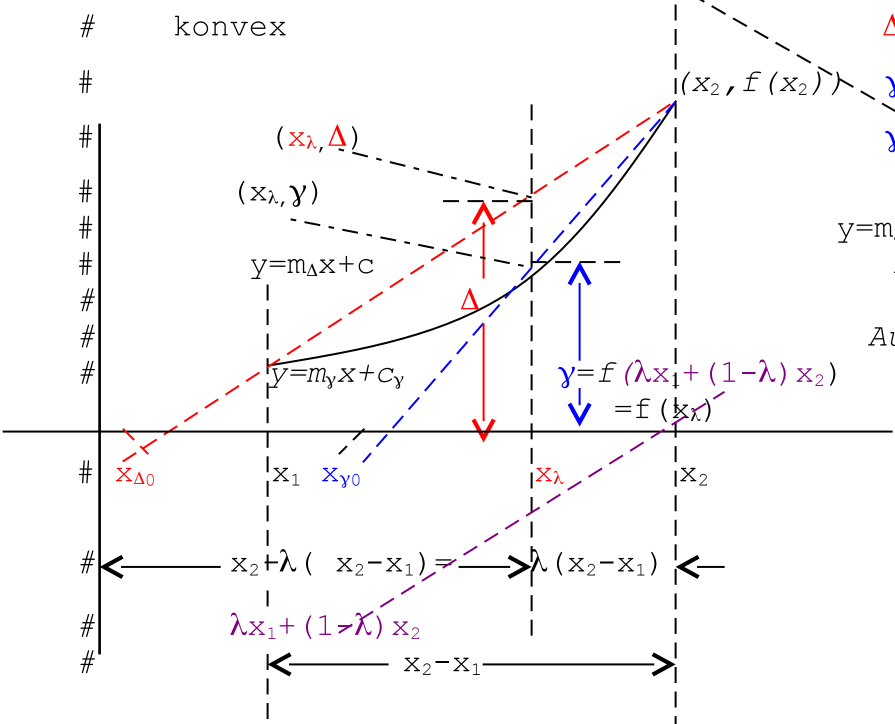
// $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ bzw //

// $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$. Gilt stets „<„ bzw. „>„, so//

// heißt f streng konvex bzw streng konkav auf I.//

Bew:

#Vor Beweisantritt - Skizze oBdA, sonst verschiebe Koordinaten



$\Delta \underset{Bew1.)}{=} (1-\lambda)f(x_2)+\lambda f(x_1)$

$\gamma=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$

$\gamma \underset{D5.2.2}{\leq} \Delta$

Aus *$(x_2,f(x_2))$ und* (x_λ,Δ): $y=m_\Delta x+c_\Delta$

Aus *$(x_2,f(x_2))$ und* (x_λ,γ): *$y=m_\gamma x+c_\gamma$*

Aus $y=m_\Delta x+c_\Delta$*:* $x_{\Delta 0}$

Aus *$y=m_\gamma x+c_\gamma$* : $x_{\gamma 0}$

Ergebnis: $x_{\Delta 0}\leq x_{\gamma 0}$ ⇒

$$\frac{f(x_2)-f(x_\lambda)}{x_2-x_\lambda}=\frac{f(x_2)-0}{x_2-x_{\lambda 0}}\geq$$

$$\frac{f(x_2)-0}{x_2-x_{\Delta 0}}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

"⇒" f konvex ⇒ $\dfrac{f(x_\lambda)-f(x_1)}{x_\lambda-x_1}\underset{(<)}{\overset{1.)}{\leq}}\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\underset{(<)}{\leq}\dfrac{f(x_2)-f(x_\lambda)}{x_2-x_\lambda}$ ⇒

$x_\lambda\to x_{1+}$ bzw $x_\lambda\to x_{2-}$

$f'(x_1)\leq\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq f'(x_2)$ und somit f′ ↗

Aus strikter Konvexität folgt sogar f′ ↑ (beachte $x_1<x_2$).

//**S5.2.3**(2803)(Mittelwertsatz der Differentialrechnung)//
//Vor:$a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b)//
//Beh: $\exists$ mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$//

"$\Leftarrow$" $x_1,x,x_2\in I$, $x_1<x<x_2$, $\xi_1\in(x_1,x)$, $\xi_2\in(x,x_2)$, $f'\uparrow$:
$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi_1)\underset{S5.2.3,\ f'\uparrow}{\leq}f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ und somit gilt aufgrund von 1.), dass f strikt konvex ist. Aus $f''>0$ folgt $f'\uparrow$ und somit, dass f strikt konvex ist.

4.) f konvex auf I, $x_0\in I$ ein lokales Minimum auf I $\Rightarrow$
x_0 ist auch ein globales Minimum auf I

D5.2.3(2861)

Sei $M\subset\mathbb{R}$, $f:M\to\mathbb{R}$ gegeben. Ein $x_0\in\overset{o}{M}$ heißt Wendepunkt von f: $\Leftrightarrow$
$\exists$ $\delta>0$ mit $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset M$ und f ist konvex auf $(x_0-\delta,x_0]$ und konkav auf $[x_0,x_0+\delta)$ oder f ist konkav auf $(x_0-\delta,x_0]$ und konvex auf $[x_0,x_0+\delta)$.

S5.2.12(2861) Notwendige Bedingung für Wendepunkt

Vor:Sei $M\subset\mathbb{R}$, $f: M\to\mathbb{R}$ gegeben und $x_0\in\overset{o}{M}$ ein Wendepunkt von f. Sei f 2-mal differenzierbar in x_0.
Beh:$f''(x_0)=0$
Bew: $\exists$ $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset M$ mit $f'\nearrow$ (bzw $\searrow$) auf $(x_0-\delta,x_0)$ und
$f'\searrow$ (bzw $\nearrow$) auf $(x_0,x_0+\delta)$ $\Rightarrow$
f' hat in x_0 ein relatives Maximum (bzw Minimum) $\Rightarrow$ $f''(x_0)=0$

S5.2.13(2861) Trigonometrische Funktionen
Vor:Sei $\pi/2\in(1,2)$ die kleinste positive Nullstelle von cos x.
Beh:1.) $\cos x\searrow$ auf $[0,\pi]$, konkav auf $[-\pi/2,\pi/2]$, konvex auf $[\pi/2,3\pi/2]$ und $\cos x\nearrow$ auf $[-\pi,0]$.
2.) $\sin x\nearrow$ auf $[-\pi/2,\pi/2]$, konkav auf $[0,\pi]$, konvex auf $[-\pi,0]$ und $\sin x\searrow$ auf $[\pi/2,3\pi/2]$.
3.) $\forall$ $z\in\mathbb{C}$, $|z|=1$ $\exists$ genau ein $\alpha\in(-\pi,\pi]$ mit $z=e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$.
S3.6.2: Für $0<\alpha<\pi$, $\sin\alpha=\mathrm{Im}\, e^{i\alpha}>0$ und α die Länge des Bogens von 1 #(0,1)# bis $e^{i\alpha}$ auf der oberen Einheitskreishälfte. Im Falle $-\pi<\alpha<0$ ist $\sin\alpha=\mathrm{Im}\, e^{i\alpha}<0$ und $|\alpha|$ die Länge des Bogens von 1 bis $e^{i\alpha}$ auf der unteren Einheitskreishälfte. Speziell ist
$e^{i\frac{\pi}{2}}=i=\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}+i*\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}$ und damit 2π der Umfang des Einheitskreises

4.) Bezeichnet

a) arcsin y, $-1\le y\le 1$, die Umkehrfunktion von sin x, $-\pi/2\le x\le \pi/2$ und

so gilt $\arcsin' y=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $-1\le y\le 1$

//**S5.1.6** (2750

//Vor: Sei $A,B\subset \mathbb{C}$ und $f:A\to B$ bijektiv und f differenzierbar in

// $x_0\in \overset{o}{A}$, $y_0:=f(x_0)\in \overset{o}{B}$

// Beh: f^{-1} ist differenzierbar in $y_0 \Leftrightarrow f^{-1}$ ist stetig in y_0 und $f'(x_0)\ne 0$

// und dann gilt $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$, $(f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$.

Bew :# $y=f(x)=\arcsin x$, $x=f^{-1}(y)=\sin y=\sin(\arcsin(x))$

$(f^{-1}(y))'=\cos y=\cos(\arcsin(x))$

$-1\le y\le 1$, arcsin y $[-1,1]\to[-\pi/2,\pi/2]$:

Umkehrfunktion $-\pi/2\le x\le\pi/2$, sin x, $[-\pi/2,\pi/2]\to[-1,1]$

$(\arcsin y)'=\frac{1}{(\sin' x)_{x=\arcsin y}}=\frac{1}{\cos(\arcsin y)}$, $\cos x=+\sqrt{1-\sin^2 x}$ $\Rightarrow$

$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{(\sin(\arcsin y))}_{y}^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

b) arccos y, $-1\le y\le 1$, die Umkehrfunktion von cos x, $0\le x\le\pi$, so gilt

$\arccos' y=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $-1\le y\le 1$.

Bew: $(\arccos y)'=\frac{1}{(\cos x)'_{x=\arccos y}}==-\frac{1}{\sin x_{x=\arccos y}}=-\frac{1}{\sin(\arccos y)}=$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-(\cos(\arccos y))^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

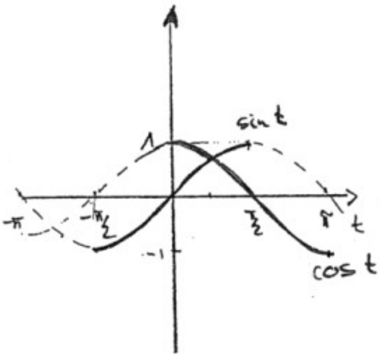
$\arcsin' y=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ und $\arccos' y=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $-1\le y\le 1$.

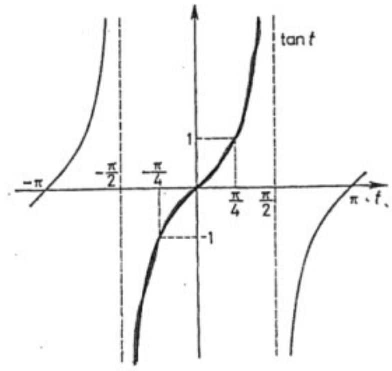
c) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ $\forall$ $x\in \mathbb{R}$.

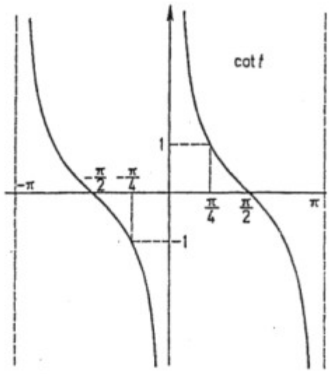
d) $(\text{arccot } x)'=\frac{-1}{1+x^2}$ $\forall$ $x\in \mathbb{R}$.

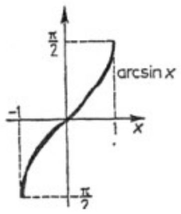
Bew b)-d) analog Bew a).

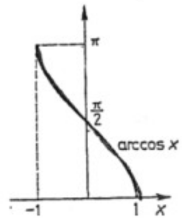
Trig. Funktionen mit ihren Umkehrfunktionen

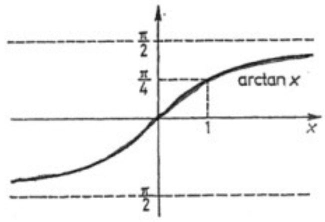












A5.2.12 Bestimme alle Extremwerte der folgenden Funktionen:
a) $f:[-1,8]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+20$

//**S5.2.5**(2805)(notwendige Bedingung für lokale Extrema)//
//Vor: $M\subset\mathbb{R}$, $f:M\to\mathbb{R}$ habe ein lokales Extremum in $x_0\in\overset{\circ}{M}$ und f sei //
differenzierbar in x_0//
//Beh: $f'(x_0)=0$//
//**S5.3.2**(2905) Hinreichende Bedingung für lokale Extrema bzw. //
//Wendepunkte//
//Vor: Sei $M\subset\mathbb{R}$, $f:M\to\mathbb{R}$ gegeben und $x_0\in\overset{\circ}{M}$ .//
//1.) Sei f 2n-mal differenzierbar auf $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset M$, $n\in\mathbb{N}$, //
// $f^{(k)}(x_0)=0$ für $k=1,3,..,2n-1$, $f^{(2n)}(x_0)\neq 0$.//
// Beh: f besitzt in x_0 ein lokales Extremum und zwar//
// ein lokales $\begin{matrix}\text{Maximum, wenn } f^{(2n)}(x_0)<0 \text{ ist}\\ \text{Minimum, wenn } f^{(2n)}(x_0)>0 \text{ ist}\end{matrix}$ //

Lös: f(x) lässt sich auf $\mathbb{R}$ (stetig) fortsetzen $\Rightarrow$
f(x) differenzierbar auf $\mathbb{R}$ (da Polynom) und
$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x^2-3x+2)=4x(x-1)(x-2)$
$f''(x)=12x^2-24x+8$ $\Rightarrow$ Die Nullstellen von $f'(x)$ sind 0,1 und 2
(nach S5.2.5 hat f evt ein lokales Extremum in 0 bzw 1 bzw 2)
$f''(0)=8>0 \underset{S5.3.2}{\Rightarrow}$ f hat in $x_1=0$ ein lokales Minimum
$f''(1)=-4<0 \underset{S5.3.2}{\Rightarrow}$ f hat in $x_2=1$ ein lokales Maximum
$f''(2)=8>0 \underset{S5.3.2}{\Rightarrow}$ f hat in $x_3=2$ ein lokales Minimum
Noch gesucht: globale Extrema von f(x) auf $M=[-1,8]$
Als globale Extrema kommen nur lokale Extrema oder
Randpunkte von M in Frage. Funktionswerte in diesen

Punkten: $f(-1)=29$, $f(0)=20$, $f(1)=21$, $f(2)=20$,
$f(8) \underset{2^3=8}{=} \underbrace{2^{12}-2^{11}}_{2048}+\underbrace{2^8}_{=256}+20=2324$ $\Rightarrow$
f hat auf M in 0 und 2 ein globales Min mit Fktwert 20
und in 8 ein globales Max mit Fktwert 2324

*//**S5.2.4**(2802) Monotonie und Ableitung//*
//Vor: Sei I ein Intervall mit Endpunkten a,b ($-\infty\le a<b\le\infty$). //
// $f:I\to\mathbb{R}$ sei stetig auf I und differenzierbar auf (a,b).//
//Beh://
//1.) f $\nearrow$ bzw. f $\searrow$ auf I $\Leftrightarrow$ $f'\ge 0$ bzw. $f'\le 0$ auf (a,b).//
//2.) f konstant auf I $\Leftrightarrow$ $f'=0$ auf (a,b).//
//3.) $f'>0$ bzw. $f'<0$ auf (a,b) $\Rightarrow$ //
// f streng monoton wachsend bzw. fallend auf I.//

Bem: Jetzt kann man noch eine Kurvendiskussion durchführen, um eine genauere Information über den Verlauf des Graphen zu erhalten.

Monotonie:

$f'(x)=4x(x-1)(x-2)<0$ auf $(-\infty,0)$, $f'(x)>0$ auf $(0,1)$,

$f'(x)<0$ auf $(1,2)$ und $f'(x)>0$ auf $(2,\infty)$ $\underset{S\,5.2.4\ 3.)}{\Rightarrow}$

$f\downarrow$ auf $(-\infty,0)$, $f\uparrow$ auf $(0,1)$, $f\downarrow$ auf $(1,2)$, $f\uparrow$ auf $(2,\infty)$

Konvexität:

$f''(x)=12(x^2-2x+2/3)=12(x-(1-\frac{1}{3}\sqrt{3})(x-(1+\frac{1}{3}\sqrt{3}))$

(da $x^2-2x+2/3=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab \Rightarrow a+b=-2,\ ab=2/3 \Rightarrow b=-2-a$

$a(-2-a)=2/3 \ldots a=1+\frac{1}{3}\sqrt{3}$ usw) $\Rightarrow$

$f''(x)>0$ auf $(-\infty,1-\frac{1}{3}\sqrt{3})$, $f''(x)<0$ auf $(1-\frac{1}{3}\sqrt{3},1+\frac{1}{3}\sqrt{3})$ und

$f''(x)>0$ auf $(1+\frac{1}{3}\sqrt{3},\infty)$ $\Rightarrow$

f konvex (linksgekrümmt) auf $(-\infty,1-\frac{1}{3}\sqrt{3})$ und auf $(1+\frac{1}{3}\sqrt{3},\infty)$,

f konkav (rechtsgekrümmt) auf $(1-\frac{1}{3}\sqrt{3},1+\frac{1}{3}\sqrt{3})$,

insbesondere hat f in $1-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ und $1+\frac{1}{3}\sqrt{3}$ Wendepunkte

(Alternative Begründung:

$f'''(x)=24x-24=24(x-1)$,

$f'''(1-\frac{1}{3}\sqrt{3})\neq 0 \Rightarrow$ f hat WP in $1-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$f'''(1+\frac{1}{3}\sqrt{3})\neq 0 \Rightarrow$ f hat WP in $1+\frac{1}{3}\sqrt{3}$

b) $f:[-1,1]\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}$

Lös: f ist eine gerade Funktion, d.h. $f(-x)=f(x)\ \forall\ x\in(-1,1)$

$f(x)$ beliebig oft differenzierbar auf $(-1,1)$ und

$f'(x)=2x\sqrt{1-x^2}+x^2\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x(1-x^2)-x^3}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$ $\Rightarrow$

Die Nullstellen von $f'(x)$ sind

$0,-\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (mögliche lokale Extrema)

Es gilt: $f'(x)>0$ auf $(-1,-\sqrt{\frac{2}{3}})$, $f'(x)<0$ auf $(-\sqrt{\frac{2}{3}},0)$,

$f'(x)>0$ auf $(0,\sqrt{\frac{2}{3}})$, und $f'(x)<0$ auf $(\sqrt{\frac{2}{3}},1)$ $\Rightarrow$

$f\uparrow$ auf $(-1,-\sqrt{\frac{2}{3}})$ und $(0,\sqrt{\frac{2}{3}})$, $f\downarrow$ auf $(-\sqrt{\frac{2}{3}},0)$ und $(\sqrt{\frac{2}{3}},1)$

$\Rightarrow$ f hat auf (-1,1 in 0 ein lokales Minimum und in

$-\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $\sqrt{\frac{2}{3}}$ jeweils ein lokales Maximum.

Wegen $\lim\limits_{n\to -1_+} f(x)=0=\lim\limits_{n\to -1_-} f(x)$, $f(-\sqrt{\frac{2}{3}})=\frac{2}{3\sqrt{3}}=f(\sqrt{\frac{2}{3}})$ und $f(0)=0$

Folgt: f hat in 0 ein globales Minimum mit $f(0)=0$ und in

$-\sqrt{\frac{2}{3}}$ und $\sqrt{\frac{2}{3}}$ jeweils ein globales Maximum mit

Funktionswert $\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{9}\sqrt{3}\approx 0{,}3844$

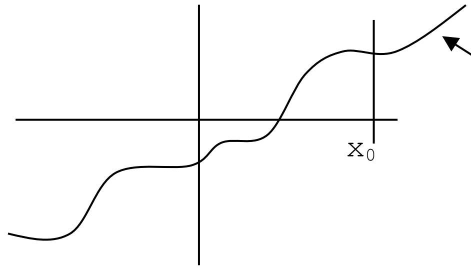
Bem: Dass f in 0 ein globales Min hat, hätte man auch schneller sehen können: $f(x)\geq 0\ \forall\ x\in(-1,1)$ und $(f(x)=0 \Leftrightarrow x=0) \Rightarrow$ f hat nur in 0 ein globales Min.
Da f gerade ist, hätte es gereicht, die Fkt auf [0,1) zu untersuchen (damit hätte man das globale Max etwas schneller erkannt)

A5.2.13

a) Es sei ein Intervall, $f: I\to \mathbb{R}$ differenzierbar (auf I), $f'(x)>0\ \forall\ x\in I\setminus\{x_0\}$ und $f'(x_0)=0$ für ein $x_0\in I$. Zeige, dass f streng monoton wachsend ist.

*//**S5.2.4**(2802) Monotonie und Ableitung//*
//Vor: Sei I ein Intervall mit Endpunkten a,b $(-\infty\leq a<b\leq\infty)$. //
// $f: I\to\mathbb{R}$ sei stetig auf I und differenzierbar auf (a,b).//
//Beh://
//1.) f $\nearrow$ bzw. f $\searrow$ auf I $\Leftrightarrow$ $f'\geq 0$ bzw. $f'\leq 0$ auf (a,b).//
//2.) f konstant auf I $\Leftrightarrow$ $f'=0$ auf (a,b).//
//3.) $f'>0$ bzw. $f'<0$ auf (a,b) $\Rightarrow$ //
// f streng monoton wachsend bzw. fallend auf I.//

Bew:



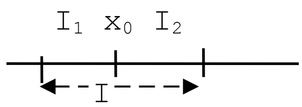
Überlegungsskizze

$\uparrow$

$f'(x)\geq 0\ \forall\ x\in I \underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.41.)} \nearrow f$ auf I und wegen

$f'(x)>0\ \forall\ x\in I\setminus\{x_0\} \underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.43.)} \uparrow$ auf Intervallen I_1 & I_2:

$I\setminus\{x_0\}=I_1\cup I_2$ & $I_1\cap I_2=\emptyset$



($I\setminus\{x_0\}$ kann in 2 Intervalle I_1 und I_2 zerlegt werden, sodass x_0 rechter Randpunkt von I_1 und x_0 linker Randpunkt von I_2 falls $I_1, I_2\neq\emptyset$. Seien $x_1,x_2\in I$ bel. mit $x_1<x_2$), Z.z. $f(x_1)<f(x_2)$

$\exists\ \xi\in(x_1,x_2)\setminus\{x_0\} \Rightarrow \begin{cases} f(x_1)<f(\xi)\leq f(x_2)\ oder \\ f(x_1)\leq f(\xi)<f(x_2)\ \#oder \\ \# f(x_1)<f(\xi)<f(x_2) \end{cases} \Rightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)$

b) Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sin x$. Zeige, dass f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Umkehrfunktion besitzt. Wo ist f^{-1} differenzierbar? Bestimme dort die Ableitung (von f^{-1}).
Hinweis: Zeige, dass f streng monoton auf $\mathbb{R}$ ist.

//a) $f: I\to\mathbb{R}$ differenzierbar (auf I),//
// $f'(x)>0\ \forall\ x\in I\setminus\{x_0\}$ und $f'(x_0)=0$ für ein $x_0\in I \Rightarrow f\uparrow$ //
//**Bsp**(2410): 2.) $f(z)=z\ \forall\ z\in\mathbb{C}$ ist stetig auf $\mathbb{C}$,
//**S4.3.2**(2408) Trigonometrische Funktionen sind stetig auf ganz $\mathbb{C}$.//
//**S4.3.4**(2409) Rechenregeln für Stetigkeit//
//Vor: $M\subset\mathbb{R}$, f,g mit $M\to\mathbb{R}$, stetig im Punkt $x_0\in M$.//
//Beh: 2.) $\alpha f+\beta g$ stetig in $x_0\ \forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (bzw $\in\mathbb{C}$),//
*//**S4.4.3** (2530) Umkehrfunktion//*
//Vor: Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I und //
// $J:=f(I)$.//
//Beh: Zu f $\exists$ eine Umkehrfunktion $f^{-1}:J\to I$ genau dann, wenn f //
// auf I streng monoton ist. In diesem Falle ist f^{-1} stetig //
// auf J und im gleichen Sinn streng monoton wie f//
*//**S4.4.1** (2500) Zwischenwertsatz (ZWS)//*
//Vor: Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall $\wedge$ $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.//
//Beh: 1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall\ y\ \exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.//
(Hinweis: Zeige, daß f streng monoton auf $\mathbb{R}$ ist).
//**S5.1.6**(2750) Differentiationsregeln//
//3.) Ableitung der Umkehrfunktion//
// Vor: Sei $A,B\subset\mathbb{R}(\mathbb{C})$ und $f:A\to B$ bijektiv und f differenzierbar in //
// $x_0\in\overset{o}{A}$, $y_0:=f(x_0)\in\overset{o}{B}$ //
//Beh: f^{-1} ist differenzierbar in $y_0 \Leftrightarrow f^{-1}$ ist stetig in y_0 und //
// $f'(x_0)\neq 0$ und dann gilt//
// $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$, $(f^{-1})'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$.//

Lös: f(x) ist beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit

$f'(x)=1+\underbrace{\cos x}_{\geq -1} \Rightarrow f'(x)\geq 0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$ ($\underset{S5.2.4\ 1.)}{\underbrace{\Rightarrow}}\nearrow f$ auf $\mathbb{R}$)

$f'(\underbrace{x}_{x_0})=0 \Leftrightarrow \cos \underbrace{x}_{x_0}=-1 \Leftrightarrow \underbrace{x}_{x_0}=\pi+2k\pi$ für ein $k\in\mathbb{Z}$ $\underset{f'(x)\geq 0}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$f'(x)>0\ \ \forall\ x\in I\setminus\{\underbrace{x}_{x_0}=\pi+2k\pi\}$

Sei $I_k:=[2k\pi,2(k+1)\pi]$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{R}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$ $\underset{a)}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$f\uparrow$ auf $\mathbb{R}$ (d.h. jedem I_k, da $f'(x)>0\ \forall\ x\in I_k\setminus\{\pi+2k\pi\}, f'(\pi+2k\pi)=0$)

$\overbrace{\underbrace{x}_{Bsp(2410)}+\underbrace{\sin x}_{S4.3.2}}^{S4.3.4\ 2.)} \Rightarrow$ f stetig & $\uparrow$ auf $\mathbb{R}$ $\underset{S4.4.3}{\underbrace{\Rightarrow}}$

f besitzt stetige Umkehrfunktion $f^{-1}:\underbrace{f(\mathbb{R})}_{=\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$.

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}=\infty \wedge \lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$ $\underset{f\ stetig\wedge\ S4.4.1\wedge\ S4.4.3}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $f(\mathbb{R})\to\mathbb{R} \wedge f^{-1}\uparrow$ stetig auf $\mathbb{R}$.

Bem: S4.4.3 ⇒ $f^{-1}\uparrow$ auf **R**. f^{-1} stetig auf **R** und
$f'(x)\neq 0\ \ \forall\ x\in\mathbf{R}\setminus\{\pi+2k\pi:k\in\mathbf{Z}\}=:M$ nach S5.1.6 3.) differenzierbar auf
$f(M)=\mathbf{R}\setminus\{\pi+2k\pi+\underbrace{\sin(\pi+2k\pi)}_{=0}):k\in\mathbf{Z}\}=M$ und
$(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{1+\cos(f^{-1}(y))}\ \ \forall\ y\in M$. Auf $\mathbf{R}\setminus M$ ist f^{-1}
nicht differenzierbar (folgt auch aus S5.1.6 3.))

c) Es sei $f:(-\pi/2,\pi/2)\rightarrow\mathbf{R}$, $f(x)=\tan x$. Zeige, dass f eine auf **R** differenzierbare Umkehrfunktion besitzt und bestimme deren Ableitung.

//**S5.2.4**(2802) Monotonie und Ableitung//
//Vor: $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$ stetig und differenzierbar $\forall\ x\in(a,b)$.//
//Andere Formulierung://
//Vor: Sei I ein Intervall mit Endpunkten a,b ($-\infty\leq a<b\leq\infty$). //
// $f:I\rightarrow\mathbf{R}$ sei stetig auf I und differenzierbar auf (a,b).//
//Beh: 3.) $f'>0$ bzw. $f'<0$ auf (a,b) ⇒ //
// f streng monoton wachsend bzw. fallend auf I.//

Bew: f(x) ist differenzierbar auf $(-\pi/2,\pi/2)$ und
$f'(x)=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x\ \ \forall\ x\in(-\pi/2,\pi/2)$.
Wegen $f'(x)\geq 1>0\ \ \forall\ x\in(-\pi/2,\pi/2)$ ist f nach S5.2.4 2.) $\uparrow$ wachsend und besitzt also (da f stetig) eine stetige Umkehrfunktion
$f^{-1}:\underbrace{f((-\pi/2,\pi/2))}_{=\mathbf{R}\,*}\rightarrow(-\pi/2,\pi/2)$.
f^{-1} stetig und $f^{-1}(x)\neq 0\ \ \forall\ x\in(-\pi/2,\pi/2)\ \underset{S5.1.6\ 3.)}{\Rightarrow}$
f^{-1} differenzierbar auf **R** und $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=$
$\#\dfrac{1}{f'(\arctan y)}=\dfrac{1}{f'(\arctan(\tan x))}=\dfrac{1}{f'(x)}=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=\#\dfrac{1}{1+y^2}\ \ \forall\ y\in\mathbf{R}$
(d.h. $\dfrac{d}{dx}\arctan x=\dfrac{1}{1+x^2}$)
$*\ \lim\limits_{x\rightarrow-\pi/2}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\rightarrow\pi/2}f(x)=\infty$ und ZWS

A5.2.14 Bestimme für folgende Funktionen f auf **R** die Stellen, an denen lokale Extrema vorliegen und gib an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.
a) $f(x)=e^{x^2-x+1}$
Lös: $0=f'(x)=e^{x^2-x+1}(2x-1)\ \Leftrightarrow\ 2x-1=0\ \Leftrightarrow\ x=1/2$
$f''(x)=e^{x^2-x+1}(2x-1)^2+e^{x^2-x+1}*2$, $f''(1/2)=e^{1(4-1/2+1}\ )^2+e^{x^2-x+1}*2>0$
⇒ Minimum
b) $f(x)=\sin x*e^x$.
Lös: $f'(x)=\cos x e^x+\sin x e^x=(\sin x+\cos x)e^x=0\ \Leftrightarrow\ \sin x=-\cos x$
$$f''(x)=(\cos x-\sin x)e^x+(\sin x+\cos x)e^x=2\cos x e^x\begin{cases}<0, x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\ Max\\ >0, x=\dfrac{7\pi}{4}+k2\pi\ Min\end{cases}$$

A5.2.15 Gegeben sei die Funktion $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$. Bestimme die Anzahl und Art der lokalen Extrema in Abhängigkeit von den Konstanten.

Lös: $f(x)'=3x^2+2bx+c=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-2b \pm\sqrt{4b^2-4ac}}{b}=\frac{-2b \pm\sqrt{4b^2-12c}}{b}$

1.Fall: $4b^2-12c<0 \Rightarrow$ keine Lösung, also keine Extrema

2.Fall: $4b^2-12c=0 \Rightarrow c=\frac{1}{3}b^2$, $x=-\frac{4b}{2b}=-b/2$…2.Ableitung 0

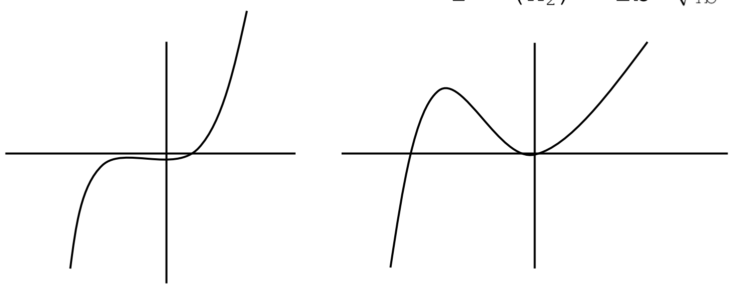
$f'(x)=3x^2+2bx+c=3x^2+2bx+\frac{1}{3}b^2=3(x+b/3)^2\geq 0 \Rightarrow f(x)$ ist monoton wachsend $\Rightarrow$ keine Extrema

3.Fall: $4b^2-12c>0$, dann

$x_1=\frac{-2b-\sqrt{4b^2-12c}}{b}$, $x_2=\frac{-2b+\sqrt{4b^2-12c}}{b}$

$f''(x)=6x+2b$, $f''(x_1)=-2b-\sqrt{4b^2-12c}+2b<0 \rightarrow$ Max

$f''(x_2)=-2b+\sqrt{4b^2-12c}+2b>0 \rightarrow$ Min



A5.2.16 Die Gleichung $x^7-3x^6+2x^2-1=0$ besitzt in $\mathbb{R}$ mindestens eine Lösung

A5.2.17 Konvergenz der Reihen?

a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\log(k)}{k}$

Lös: $f(x)=\frac{\log(x)}{x}$

A5.2.18

$f: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, völlig beliebig (auch unstetig, nicht differenzierbar)

$g(x)=e^{f(x)}$.

Zeige: $(\xi,f(\xi))$ Extremstelle von $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $(\xi,g(\xi))$ Extremstelle von $g(x)$

Bew: "$\Rightarrow$" Sei ξ lokales Maximum von $f \Rightarrow \exists\ \varepsilon>0$: $f(x)\leq f(\xi)\ \forall\ x\in U_\varepsilon(\xi) \underset{x\mapsto e^x\uparrow}{\Rightarrow}$

$e^{f(x)}\leq e^{f(\xi)}\ \forall\ x\in U_\varepsilon(\xi) \Rightarrow \xi$ lokales Maximum von g.

Analog für Minimum

$\Rightarrow \xi,f(\xi))$ Extremstelle von $f(x) \Rightarrow (\xi,g(\xi))$ Extremstelle von $g(x)$

"$\Leftarrow$" Sei ξ lokales Maximum von $g(x) \Rightarrow \exists\ \varepsilon>0$: $e^{f(x)}\leq e^{f(\xi)}\ \forall\ x\in U_\varepsilon(\xi)$

$e^x\in(0,\infty)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ & $\log\uparrow$ auf $(0,\infty) \Rightarrow \log(e^{f(x)})\leq\log(e^{f(\xi)})\ \forall\ x\in U_\varepsilon(\xi)$

$\underset{\log\ Umkehrf\ zu\ \exp}{\Rightarrow} f(x)\leq f(\xi)\ \forall\ x\in U_\varepsilon(\xi) \Rightarrow \xi$ lokales Maximum von f. Analog Min

$\Rightarrow (\xi,f(\xi))$ Extremstelle von $f(x) \Leftrightarrow (\xi,g(\xi))$ Extremstelle von $g(x)$

A5.2.19 $f(x)=\cos(2\pi x)$, Alle Extremstellen und Wendepunkte?

*//**S5.1.6** (2750) 2.)Kettenregel*
//Vor:Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in \overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in\overset{\circ}{B}$, und sei
// $g:B\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.
//Beh: $g\circ f:A\to\mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$
// (Kettenregel) $(g\circ f)'=(g'\circ f)f'$.
*//**S5.2.1** (2800)(notwendige Bedingung für lokale Extrema)*
//Vor: I offenes Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$,
// f in x_0 differenzierbar
//Aussage: x_0 ist lokales Extremum $\underset{!}{\Rightarrow}$ $f'(x_0)=0$
*//**S5.2.7** (2807)*
//Vor:f in (a,b)differenzierbar, $x_0\in(a,b)$, $f'(x_0)=0$, $\exists\ f''(x_0)\neq 0$
//Aussage: f hat in x_0 ein lokales Extremum:
// Minimum falls $f''(x_0)>0$, Maximum falls $f''(x_0)<0$

Lös: ● Extrama
cos beliebig oft differenzierbar & stetig ⇒ dgl $f(x)$ ⇒

$f'(x) \underset{S5.1.6\,2.)}{=} (2\pi x)'\cos'(2\pi x)=-2\pi\sin(2\pi x)$, $f''(x)\underset{S5.1.6\,2.)}{=}-4\pi^2\cos(2\pi x)$,

$f'''(x)\underset{S5.1.6\,2.)}{=}8\pi^3\sin(2\pi x)$,

$f^{(k)}(x+j)\underset{\text{alle } f^{(k)} \text{ periodisch}}{=} f^{(k)}(x)\quad\forall\ k\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{R}$

Sei ξ Extremstelle von $f'(x)=-2\pi\sin(2\pi\xi)\ \underbrace{\overset{\text{notwendig}}{=}}_{S5.2.1}\ 0 \Rightarrow \xi=\frac{1}{2}k$.

$f''(x)=-4\pi^2\cos(2\pi x)\underset{\text{hinreichend)}}{=}0\Rightarrow x\underset{k\in Z}{=}\frac{1}{2}\underset{=0}{k}+\frac{1}{4}\Rightarrow$

$\min(|(f'x)-f''(x)|)\underset{f'(x)=0,\,f''(x)=0}{=}\frac{1}{4}\Rightarrow f'(x)\neq f''(x)\Rightarrow (f'(x)=0\Rightarrow f''(x\neq 0))$

$\Rightarrow\ \forall\ \xi=\frac{1}{2}k$: $f'(x)=0$ & $f''(x)\neq 0\ \underbrace{\overset{\text{hinreichen}}{=}}_{S5.2.7}\ \frac{1}{2}k$ sind alle Extremstellen.

● ● Analog Wendepunkte, sin und cos vertauscht
$f''(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}\Rightarrow f'''(\frac{1}{2}k-\frac{1}{4})\neq 0$ da $f'''(x)=0$ nur für $x=\frac{1}{2}k$

x Extremstelle von f $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}k\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$,

x Wendepunkt von f $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$,

● ● ● k ungerade $\Rightarrow x=k-\frac{1}{4}$: $(\cos(2\pi(\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}))>0\Rightarrow f''(x)<0))\Rightarrow$ x ist Max