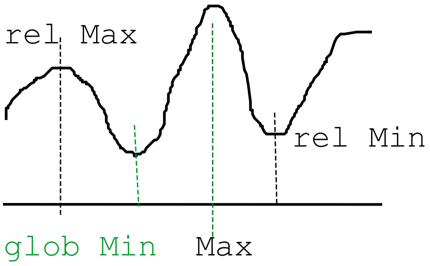
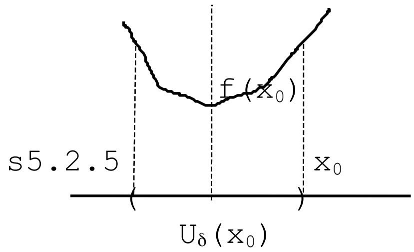
5.2 (2800) Extrema, Mittelwertsätze der Differentialrechnung

D5.2.1 (2800) Sei $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$ gegeben. f hat in $x_0 \in M$ ein
- globales Maximum (Minimum) $\Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ $\forall x \in D$
- lokales Maximum (Minimum) $\Leftrightarrow \exists\, \delta > 0$: $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$

  $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| \leq \delta$ bzw $\forall x \in (a,b) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Extremum heißt Maxima oder Minima





S5.2.1 (2800) (notwendige Bedingung für lokale Extrema)

Vor: I offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$,
f in x_0 differenzierbar

Aussage: x_0 ist lokales Extremum $\underset{!}{\Rightarrow}$ $f'(x_0) = 0$ (rückwärts kann falsch sein)

Bew: Sei $x_0 \in I = (a,b)$ lokales Maximum $\underset{D5.2.1}{\Rightarrow}$

$\exists\, \varepsilon > 0$: $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in (a,b) \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ (Min: f durch −f ersetzen)

$a < x_0 < b \underset{\text{passendes kleines } \varepsilon}{\Rightarrow} [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a,b) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \Rightarrow$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)] \underset{f \text{ diffb}}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_{0+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{.....analog}$$

$$\lim_{x \to x_{0-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\Rightarrow \exists\, f'(x_0) = \lim_{x \to x_{0+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_{0-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

Bem: (.) $f'(x_0) = 0$ ist nur notwendig für das Vorliegen eines Extremums aber keine hinreichende Bedingung

Andere Formulierung

*//**D4.1.1** (2200) $x \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $U_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*

//1.) $x_0 \in M$ heißt innerer Punkt von M: $\Leftrightarrow \exists\, \delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset M$.//

// $\overset{o}{M}$ sei die Menge aller inneren Punkte von M //

Ist x_0 aus dem Rand $x_0 \in I \setminus \overset{o}{I}$ ein lokales Extremum, so muss nicht gelten $f'(x_0) = 0$

Bsp: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, aber 0 ist kein Extremum

(..) x_0 muss in offenem Intervall definiert sein. Aussage gilt nicht, wenn $f: I \to \mathbb{R}$ in einem Endpunkt x_0 ein lokales Extremum besitzt.
Bsp: $f(x) = x$, $x \in [0,1]$ (nur einseitige Näherung) $\Rightarrow$
glob Max=1, glob Min=0, aber $f'(x) = 1 \neq 0$ $\forall x \in [0,1]$

Andere Formulierung:

Vor: $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$ habe ein lokales Extremum in $x_0 \in \overset{o}{M}$ und f sei differenzierbar in x_0

Beh: $f'(x_0)=0$

Bew: Sei $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall$ $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset M$ (Min: f durch -f ersetzen)

$$\exists\ f'(x_0)=f'_+(x_1)=f'_-(x_0).\quad x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{<0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \underset{x\to x_{0+}}{\to} = f'_+(x_0) \leq 0.$$

$$x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow \underset{x\to x_{0-}}{\to} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{<0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} = f'_-(x_0) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0)=0$$

Bsp: 1.) $f(x)=x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=2x=0$ für $x=0$ $\Rightarrow$ f hat lokales Minimum in $x=x_0=0$

2.) $f(x)=\sin x$, $I=[0,\pi]$ stetig, kompaktes Intervall
$f'(x_0)=0$, d.h. $\cos x_0=0 \Leftrightarrow x_0=\pi/2$,
3 Kandidaten: $x_1=0$, $x_0=\pi/2$, $x_2=\pi$,
Min: $\sin x_1=\sin x_3=0$, $\sin \pi/2=1$, Max auf $[0,\pi]$

3.) $f(x)=x^3$, $x \in \mathbb{R}$, f hat kein lokales Extremum obwohl $f'(x)=3x^2=0$ für x $x_0=0$

S5.2.2(2802) Satz von Rolle

Vor: $a<b$, $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) und $f(a)=f(b)$

Beh: $\exists\ \xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=0$.

*//**S4.4.7**(2560)Globale Extrema//*

//Vor: $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ ˇ M kompakt, $f:M\to\mathbb{R}$ stetig auf M.//

//Beh: $\exists \min_{z\in M} f(z)=\min f(M)\in\mathbb{R}$ und $\exists \max_{z\in M} f(z)=\max f(M)\in\mathbb{R}$, d.h.//

// $\exists\ z_1,z_2\in M$ mit $f(z_1)\le f(z)\le f(z_2)\ \ \forall\ z\in M$.//

Bem: In folgenden Bsp sind die Vor nicht erfüllt

1. $f(x):=x-a$ für $a\le x<b$, $f(x):=0$ für $x=b$: fehlende Stetigkeit
2. $f(x):=x-a$ für $a\le x\le\frac{a+b}{2}$, $f(x):=b-x$ für $\frac{a+b}{2}\le x\le b \Rightarrow$

   $f_+'(\frac{a+b}{2})=-1$, $f_-'(\frac{a+b}{2})=1$: fehlende Differenzierbarkeit

*//**D5.2.1** (2800) Sei $M\subset\mathbb{R}(\mathbb{C})$, $f:M\to\mathbb{R}$ gegeben. //*

// f hat in $x_0\in M$ ein lokales oder relatives Minimum bzw. Minimum:$\Leftrightarrow$ //

// $\exists\ \delta>0$ mit $U_\delta(x_0)\subset M$ und $f(x)\le f(x_0)\ \ \forall\ x\in U_\delta(x_0)$ bzw. $f(x)\ge f(x_0)\ \ \forall\ x\in U_\delta(x_0)$.

// In beiden Fällen hat f in x_0 ein lokales oder relatives Extremum.

*//**S5.2.1**(2800)(notwendige Bedingung für lokale Extrema)//*

//Vor: $M\subset\mathbb{R}$, $f:M\to\mathbb{R}$ habe ein lokales Extremum in $x_0\in\mathring{M}$ und f sei //

// differenzierbar in x_0

//Beh: $f'(x_0)=0$//

Bew: o.B.d.A. sei f nicht konstant auf $[a,b]$(sonst ist $f'(x)=0\ \ \forall\ x\in(a,b)$)
$\Rightarrow\ \exists\ c\in(a,b)$ mit $f(c)\neq f(a)=f(b)$.

o.B.d.A. sei $f(c)>f(a)=f(b)$ (sonst betrachte $-f$) $\underset{S4.4.7}{\Rightarrow}$

$\exists\ \xi\in[a,b]$ mit $f(\xi)\ge f(x)\ \ \forall\ x\in[a,b] \Rightarrow f(\xi)\ge f(c)>f(a)=f(b)$

$\Rightarrow \xi\in(a,b) \Rightarrow \xi$ lokales Max $\underset{S5.2.1}{\Rightarrow}$ $f'(\xi)=0$

Andere Formulierung:

Vor $\underset{S4.4.7}{\Rightarrow}$ $\exists\ x_*,x^*\in[a,b]$ mit $f(x_*)\le f(x)\le f(x^*)\ \ \forall\ x\in[a,b]$.

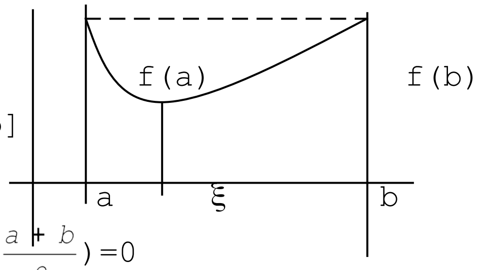
- $f(x_*)=f(x)=f(x^*) \Rightarrow$ f konstant
  die Beh, trivialerweise erfüllt.
- Sonst: $x_*\in(a,b)$ oder $x^*\in(a,b)$. Sei dies oBdA x^* (sonst betrachte $-f$).

  Dann gilt für den Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*}=\begin{cases}\ge 0 (a\le x<x^*)\\ \le 0 (x^*<x\le b)\end{cases}$.

  Daraus folgt, dass der Grenzwert für $x\to x^*$, also die Ableitung im Punkt x^* gleich 0 sein muss.

Andere Formulierung:

Es sei eine stetige Funktion $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ $a<b$, welche auf (a,b) differenzierbar ist, gegeben. Gilt $f(a)=f(b)$ so existiert mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=0$



Bew: Da f stetig auf $[a,b]$ (kompakt!)

$\exists$ $x_1=\min\limits_{[a,b]} f$ bei x_1 $\vee$ $x_2=\max\limits_{[a,b]} f$.

Dann gilt $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$ $\forall$ $x\in[a,b]$

1.Fall: $f(x_1)=f(x_2)$ $\Rightarrow$ $f(x)\equiv$const

z.Bsp $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$

2.Fall: $f(x_1)<f(x_2)$, es muss gelten x_1 oder $x_2\in(a,b)$.

Bem: 1.) S5.2.2 wird falsch, wenn f nur auf $[a,b)$ oder $(a,b]$ stetig ist.

2.) Speziell gilt: Ist $f(a)=f(b)=0$, so hat f' mindestens eine Nullstelle zwischen a und b. Hat f m Nullstellen auf I, so hat f' mindestens m-1 Nullstellen

Bsp: $f(a)=f(b)=0$, $f(x)=(x-a)$ $\forall$ $a\le x<b$ $\Rightarrow$ $f'(x)=1$ $\forall$ $x\in(a,b)$

S5.2.3(2803) (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Vor: $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b)

Beh: $\exists$ mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

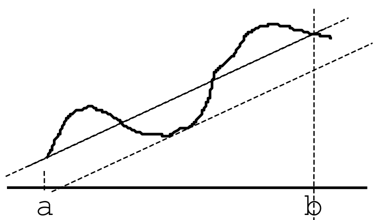
//**S5.2.2**(2802)Satz von Rolle//
//Vor: $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar//
// auf (a,b) und $f(a)=f)b)$//
//Beh: $\exists$ $\xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=0$.//

Bew: Setze $g(x)=f(x)-[f(b)-f(a)](x-a)/(b-a)$, d.h.
$g(a)=f(a)-[f(b)-f(a)](a-a)/(b-a)=f(a)$,
$g(b)=f(b)-[f(b)-f(a)](b-a)/(b-a)=f(a)$

$$\Rightarrow g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \underset{S5.2.2}{\Rightarrow} \exists\ \xi\in(a,b) \text{ mit } g'(\xi)=0 \Rightarrow$$

$$0=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Bem: Geometrische Interpretation von S5.2.3: Zur Sehne des Graphen von $(a,f(a))$ nach $(b,f(b))$ $\exists$ mindestens eine parallele Tangente durch den Punkt $(\xi,f(\xi))$ mit $a<\xi<b$.



mindestens 1 parallele Tangente

S5.2.4(2804) Erweiterter Mittelwertssatz der Differentialrechnung

Vor: (.) $a<b$, $f,g: [a,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b).

\# Stetigkeit auf $[a,b]$ wird in S5.2.2 gefordert, der zum Beweis
\# dient (Im Bew zu S5.2.2 kommt S4.4.7 zur Anwendung, in dessen Bew
\# Stetigkeit in $[a,b]$ notwendig ist)

(..) $g'(x)\neq 0 \ \forall\ x\in(a,b) \Rightarrow g(b)-g(a)\neq 0 \Rightarrow g(b)\neq g(a)$

Beh: Gilt (.) so $\exists\ \xi\in(a,b)$: $f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a))$.

Gilt zusätzlich (..) so folgt $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

//**S5.2.2**(2802) Satz von Rolle//
//Vor: $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar//
// auf (a,b) und $f(a)=f(b)$//
//Beh: $\exists\ \xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=0$.//

Bew: # Sei $\phi(x):=[f(b)-f(a)]g(x)-[g(b)-g(a)]f(x)$, $x\in[a,b] \Rightarrow$
\# $\phi(a):=[f(b)-f(a)]g(a)-[g(b)-g(a)]f(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a)$, $x\in[a,b] \Rightarrow$
\# $\phi(b):=[f(b)-f(a)]g(b)-[g(b)-g(a)]f(b)=f(b)g(a)-g(b)f(a)$, $x\in[a,b] \Rightarrow$
\# $\phi(a)=\phi(b) \Rightarrow$ Vor S5.2.2 erfüllt
\# $\phi'(x)=[f(b)-f(a)]g'(x)-[g(b)-g(a)]f'(x)$,
\# $\underset{S5.2.2}{\Rightarrow}\ \exists\ \xi\in(a,b)$ mit $\phi'(\xi)=0 \Rightarrow [f(b)-f(a)]g'(\xi)=[g(b)-g(a)]f'(\xi) \underset{Vor\ (..)}{\Rightarrow}$
\# $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Bem: 1.) S5.2.4 impliziert S5.2.3 mit $g(x)=x$

2.) S5.2.3 $\nRightarrow$ S5.2.4

3.) $g'(x)\neq 0\ \forall\ x\in(a,b) \Rightarrow g'(\xi)\neq 0\ \forall\ x\in(a,b) \Rightarrow \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(\xi)\neq 0 \Rightarrow$
$g(a)\neq g(b) \Rightarrow (g(b)-g(a)\neq 0)$

S5.2.5(2804) Monotonie und Ableitung

Vor: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar $\forall\ x\in(a,b)$.

Andere Formulierung:

Vor: Sei I ein Intervall mit Endpunkten a,b $(-\infty\leq a<b\leq\infty)$.
$f:I\to\mathbb{R}$ sei stetig auf I und differenzierbar auf (a,b).

Beh:

1.) f $\nearrow$ bzw. f $\searrow$ auf I $\Leftrightarrow$ $f'\geq 0$ bzw. $f'\leq 0$ auf (a,b).

//**S5.2.3**(2803) Vor: $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diffb auf (a,b)//
//Beh: $\exists$ mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$//

Bew: "$\Rightarrow$" Sei f $\nearrow$ auf I, $x_1,x_2\in I$, $x_1\leq x_2 \Rightarrow$
$f(x_1)\leq f(x_2)$, $x_0\in(a,b) \Rightarrow \forall\ \delta>0: x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset I \Rightarrow$

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}}\geq 0 \Rightarrow f'(x_0)\geq 0\ \forall\ x_0\in(a,b)$$

"$\Leftarrow$" $f'(x)\geq 0$ bzw. $f'(x)>0$ $\forall\ a<x<b$.

Sei $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2 \underset{S5.2.3}{\Rightarrow} f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi)\geq 0$:
$x_1<\xi<x_2$ bzw >0

2.) f konstant auf I $\Leftrightarrow$ $f'=0$ auf (a,b).

Andere Formulierung

$f'(x)=0\ \forall\ x\in(a,b) \Leftrightarrow f(x)\equiv const$

Bew: $f=const \Leftrightarrow f \nearrow$ und $f \searrow \Leftrightarrow f'>0$ und $f'\le 0 \Leftrightarrow f'=0$ auf (a,b)

Andere Formulierung Bew:

//**S5.2.3**(2803) Vor: $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diffb auf (a,b)//

//Beh: $\exists$ mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$//

Bew: „$\Rightarrow$" $x_0,x_1\in[a,b]$, $x_0<x_1$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.3\ mit[x_0,x_1]}$

#$\exists$ mindestens ein $x\in(x_0,x_1)$ mit $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f'(x)=0 \Rightarrow$ #

$\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f'(x)=0\ \forall\ x\in(a,b)$ # $\Rightarrow$

$f(x_1)-f(x_0)=0$ ist. Also muß f konstant sein.

„$\Leftarrow$" Die Umkehrung ist klar, weil die Ableitung einer konstanten Funktion verschwindet.

Andere Formulierung Bew:

Bew: Wähle ein $x_0\in I$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.3}$ $\forall\ x\in I\ \exists\ \xi_x$: $0=f'(\xi_x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f(x)=f(x_0)$

$\Leftrightarrow$ Beh.

3.) $f'>0$ bzw. $f'<0$ auf $(a,b)\Rightarrow f$ streng monoton wachsend bzw. fallend auf I.

Andere Formulierung:

Für eine differenzierbare Funktion $f: I\to\mathbb{R}$ gilt:

Ist $f'(x) \gtrless 0$ auf $\overset{o}{I}$, so ist $f\uparrow$ $(\downarrow)$ auf I

Bew: $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.2}$ $0<f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f\uparrow$

4.) Vor: $f,g: I\to\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen

a) Gilt $f'(x)=g'(x)\ \forall\ x\in I$, so existiert ein $c\in\mathbb{R}$ mit $f(x)=g(x)+c\ \forall\ x\in I$.

Bew: Sei $h(x):=f(x)-g(x)=c$ $\underbrace{\Rightarrow}_{2)}$ Beh

b) Ist $I=[a,b)$ und gilt $f(a)\ge g(a)$ sowie $f'(x)\ge g'(x)\ \forall\ x\in(a,b)$, so folgt $f(x)\ge g(x)\ \forall\ x\in[a,b)$.

//**S5.2.3**(2803)(Mittelwertsatz der Differentialrechnung)//
//Vor:a<b, $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b)//

//Beh: $\exists$ mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

Bew: $h(x)=f(x)-g(x)$. Annahme: $\exists$ $x_0\in(a,b)$ mit $h(x_0)<0$ d.h $f(x)<g(x)$

#f,g: $I\to \mathbb{R}$ differenzierbar $\Rightarrow$ h differenzierbar auf (a,b) $\underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.3}$

#$\exists$ mindestens ein $\xi_{x_0}\in(a,b)$ mit $\frac{h(x_0)-h(a)}{x_0-a}=h'(\xi_{x_0})$

$0\underbrace{\leq}_{Vor}h'(\xi_{x_0})\underbrace{=}_{S5.2.3}\frac{h(x_0)-\overbrace{h(a)}^{\geq 0}}{x_0-a}\leq\frac{h(x_0)}{x_0-a}<0\Rightarrow$ Widerspruch 0<0

Bem:Gilt unter den Vor von a), dass $f(x_0)=g(x_0)$ für ein $x_0\in I$, so folgt $c=0$, d.h. $f(x)\equiv g(x)$

S5.2.6(2806)(notwendige Bedingung für lokale Extrema)
Beh: f in (a,b) differenzierbar $\wedge$ für ein $x_0\in(a,b)$ gilt
$(x-x_0)f'(x)\geq 0$ (bzw. $(x-x_0)f'(x)\leq 0$) $\forall$ $x\in((a,b)$ $\Rightarrow$
x_0 lokales Minimum (bzw. Maximum) von f

//**S5.2.2**(2803)(Mittelwertsatz der Differentialrechnung)//
//Vor:a<b, $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b)//

//Beh: $\exists$ mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$//

Bew:Im ersten Fall ist $f'(x)\geq 0$ für $x>x_0$ $(x-x_0>0)$ und $f'(x)\leq 0$ für $x<x_0$ $(x-x_0<0)$. Mit dem Mittelwertsatz folgt, dass $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ dasselbe Vorzeichen wie die Ableitung an einer Zwischenstelle ξ haben muss und daraus folgt die Beh für diesen Fall.
Der andere Fall kann genauso bewiesen werden.

$\forall$ $\xi,x\in(a,b)\backslash x_0$: $\frac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{>0}}=f'(\xi)\geq 0$ $\vee$ $\frac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{<0}}=f'(\xi)\leq 0\Rightarrow f(x)>f(x_0)$

S5.2.7 (2807)
Vor: f in (a,b) differenzierbar, $x_0\in(a,b)$, $f'(x_0)=0$, $\exists\ f''(x_0)\neq 0$
Aussage: f hat in x_0 ein lokales Extremum:
Minimum falls $f''(x_0)>0$, Maximum falls $f''(x_0)<0$

//**S5.2.1** (2800)(notwendige Bedingung für lokale Extrema)//
//Vor: I offenes Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$, //
// f in x_0 differenzierbar//
//Aussage: x_0 ist lokales Extremum $\underbrace{\Rightarrow}_{!}$ $f'(x_0)=0$//

Bew: $f''(x_0) \underbrace{=}_{D5.1.1} \lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)-\overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{x-x_0} \underbrace{\Rightarrow}_{f''(x_0)>0}$

$\dfrac{f'(x)-\overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{x-x_0}>0$ für genügend kleine $(x-x_0)$ $\Rightarrow$ $(x-x_0)f'(x)>0$ für diese x

$\underbrace{=}_{S5.2.1}$ f hat in x_0 lokales Minimum
Beachte :oBdA kann (a,b) so verkleinert werden, dass Vor gilt
Bew Maximum analog

Andere Formulierung Bew:
//**D5.1.1**(2700)//
//2.)Die höheren Ableitungen von f sind induktiv folgendermaßen
// definiert: Sei $M\subset\mathbb{C}$, $f: M\to\mathbb{C}$ gegeben.
// Für $z_0\in M$ sei $f^{(0)}(z_0):=f(z_0)$.
// Sei $U_\delta(z_0)=\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|<\delta\}\subset M$ (in $\mathbb{R}$: $U_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset M$).
// Ist $n\in N$ und $\exists\ f^{(n-1)}(z)\ \forall\ z\in U_\delta(z_0)$, dann heißt
// f n-mal differenzierbar in z_0:$\Leftrightarrow$ $f^{(n-1)}(z)$ ist in z_0 differenzierbar, //
d.h. $\exists\ \lim_{z\to z_0}\dfrac{f^{(n-1)}(z)-f^{(n-1)}(z_0)}{z-z_0}=:f^{(n)}(z_0)\in\mathbb{C}$ bzw.

// $\exists\ f^{(n)}(z_0):=\dfrac{d}{dz}f^{(n-1)}(z)\Big|_{z=z_0}=(f^{(n-1)}(z))'_{z=z_0}$.
//**S5.2.6** (2806)Für $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, mit $a<b$ gilt://
//b)Falls f in (a,b) differenzierbar ist und falls für ein $x_0\in(a,b)$ gilt //
$(x-x_0)f'(x)\geq 0$ (bzw $(x-x_0)f'(x)\leq 0$) $\forall\ x\in(a,b)$, dann ist x_0 ein lokales
// Minimum(bzw Maximum) von f.//

Bew: $f''(x_0) \underbrace{=}_{D5.1.1\,2.)} \lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)-\overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$. $\exists\ \varepsilon>0$: $\dfrac{f'(x)}{x-x_0} \underbrace{\geq}_{f''(x_0)>0} 0\ \ \forall\ |x-x_0|<\varepsilon$

$\Rightarrow$ $(x-x_0)f'(x)>0$ $\forall$ x: $|x-x_0|<\varepsilon$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.6b)}$ f hat hier lokales Minimum
(beachte, dass wir oBdA das Intervall (a,b) so verkleinern können, dass die Voraussetzung auf dem ganzen Intervall gilt).
Der andere Fall wird genauso bewiesen

Bsp: 1.) sin x hat lokale Extrema an allen Nullstellen von cos x
Bew: ?
2.)Alle lokalen Extremstellen von $f(x)=[1-x^2]^{-1}$

A5.2.1 • f,g stetig auf [a,b] • differenzierbar auf (a,b), • $f(a)=g(a)$,
• $0 \le f'(x) < g'(x)$ $\forall$ $x\in(a,b)$.
Zeige $f(x)<g(x)$ $\forall$ $x\in(a,b]$

Lös:Betrachte $h(x)=g(x)-f(x)$ $\Rightarrow$ $h'(x)=g'(x)-f'(x)>0$ auf (a,b) $\Rightarrow$
$h\uparrow$ $\Rightarrow$ $h(x)>h(a)$ $\forall$ $x>a$, $g(x)-f(x)>g(a)-f(a)=0$ $\Rightarrow$ $g(x)>f(x)$ $\forall$ $x\in(a,b]$

S5.2.8(2808) Zwischenwertsatz von Darboux
Vor:Sei $I\subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ differenzierbar auf I.
Sei $a<b$, $a,b\in I$ und $f'(a)\neq f'(b)$.
Beh: $\forall$ $\eta: f'(a)\ge(\le)\eta\ge(\le)f'(b)$ $\exists$ $\xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=\eta$.

*//**S4.4.7**(2560)Globale Extrema//*
//Vor: $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ $^\vee$ M kompakt, $f:M\to\mathbb{R}$ stetig auf M.//
//Beh: $\exists$ $\min\limits_{z\in M} f(z)=\min f(M)\in\mathbb{R}$ und $\exists$ $\max\limits_{z\in M} f(z)=\max f(M)\in\mathbb{R}$, d.h.//
// $\exists$ $z_1,z_2\in M$ mit $f(z_1)\le f(z)\le f(z_2)$ $\forall$ $z\in M$.//
//**S5.1.2**(2705) Ist eine Funktion $f:I\to\mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 differenzierbar,
// so ist sie dort auch stetig.
//**S5.2.1**(2800)(notwendige Bedingung für lokale Extrema)//
//Vor:$M\subset\mathbb{R}$, $f:M\to\mathbb{R}$ habe ein lokales Extremum in $x_0\in\overset{\circ}{M}$ und f sei //
// differenzierbar in x_0//
//Beh:$f'(x_0)=0$//

Bew:Sei o.B.d.A. $f'(a)>\eta>f'(b)$ und $F(x):=f(x)-\eta x$ $\forall$ $x\in I$ $\Rightarrow$
F differenzierbar auf I, $F'(a)=f'(a)-\eta>0$, $F'(b)=f'(b)-\eta<0$

$$\Rightarrow F'(a)=\lim_{x\to a_+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}>0 \Rightarrow \lim_{x\to a_+}\frac{\overbrace{F(x)-F(a)}^{>0}}{\underbrace{x-a}_{>0}}>0,$$

$$F'(b)=\lim_{x\to b-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}<0 \Rightarrow \lim_{x\to b-}\frac{\overbrace{F(x)-F(b)}^{>0}}{\underbrace{x-b}_{<0}}<0$$

Für $x>a$, x nahe an a gilt $F(x)>F(a)$ $\forall$ $a<x<a+\delta$
Für $x<b$, x nahe an b gilt $F(x)>F(b)$, $\forall$ $b-\delta<x<b$.
F $\underbrace{\textit{stetig}}_{S5.1.2}$ stetig auf I $[a,b]$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.7}$ $\exists$ $\xi\in(a,b)$ mit $F(\xi)\ge F(x)$ $\forall$ $a\le x\le b\,(x\in[a,b])$ $\Rightarrow$

$\xi\neq a$, $\xi\neq b$ $\Rightarrow$ $\xi\in(a,b)$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.5}$ $F'(\xi)=(f(\xi)-\eta\xi)'=f`'(\xi)-(\eta\xi)'=0$ $\Rightarrow$ $f'(\xi)=\eta$

Bem:In S5.2.8 braucht f' nicht stetig zu sein.

Andere Formulierung:
Sei f auf dem abgeschlossenen Intervall [a,b] differenzierbar und sei
y eine beliebige Zahl mit $f'(a)\le y\le f'(b)$ oder $f'(b)\le y\le f'(a)$.
Dann gibt es ein $x\in[a,b]$ mit $f'(x)=y$.

*//**S4.4.7**(2560)Globale Extrema//*
//Vor: $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ ˅ M kompakt, $f:M\to\mathbb{R}$ stetig auf M.//
//Beh:$\exists \min_{z\in M} f(z)=\min f(M)\in\mathbb{R}$ und $\exists \max_{z\in M} f(z)=\max f(M)\in\mathbb{R}$, d.h.//
// $\exists\ z_1,z_2\in M$ mit $f(z_1)\le f(z)\le f(z_2)\ \forall\ z\in M$.//

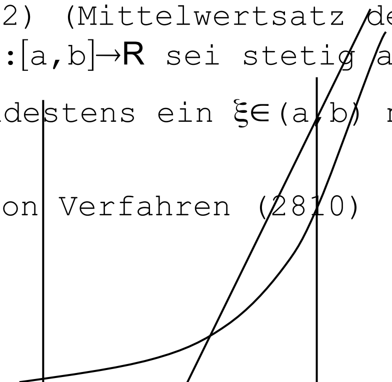
//**S5.2.1**(2806)(notwendige Bedingung für lokale Extrema)//
//Vor:$M\subset\mathbb{R}$,$F:M\to\mathbb{R}$ habe ein lokales Extremum in $x_0\in\mathring{M}$ und f sei //
// differenzierbar in x_0//
//Beh:$f'(x_0)=0$//

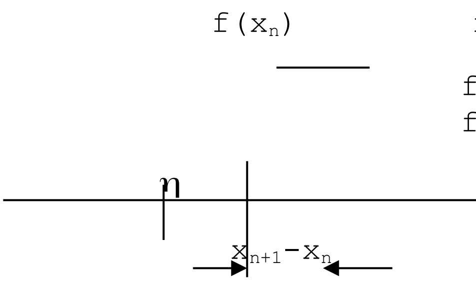
Bew:
- Falls $y=f'(a)$ oder $y=f'(b)$, ist nichts zu zeigen.
- Sonst sei $g(x)=f(x)-xy$ gesetzt. Sei oBdA $f'(a)<y<f'(b)$ angenommen(sonst betrachte $-f$ und $-y$)). Dann ist $g'(a)=f'(a)-y<0$ und $g'(b)=f'(b)-y>0$. Daraus folgt, dass das Minimum von g(welches nach S4.4.7 existieren muss) nicht in einem der Randpunkte liegen kann (#weil $g'=0$ [die Bedingung für Extremwerte] für $a<x<b$#), also in einem Punkt $x_0\in(a,b)$ angenommen werden muss. Nach S5.2.1 folgt $g'(x_0)=f'(x_0)-y=0 \Rightarrow f'(x_0)=y$.

Bsp: $g(x):=0$ für $-\infty<x<x_0$, $g(x):=1$ für $x_0\le x<\infty \underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.8}$
$\exists$ keine $f(x)$ auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x)=g(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

//**S5.2.2**(2802) (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)//
//Vor:$a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b)//
//Beh: $\exists$ mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$//

S5.2.7 Newton Verfahren (2810)
#Bspskizze:





$$f'(x_n)=\frac{f(x_n)}{x_n-x_{n+1}} \Rightarrow$$

$$f(x_n)=f'(x_n)(x_n-x_{n+1}) \Rightarrow$$

$$f'(x_n)x_{n+1}=x_nf'(x_n)-f(x_n) \Rightarrow$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ ...deshalb Motivation

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b) und sei $\eta\in(a,b)$ eine Nullstelle von f mit $f'(\eta)\neq 0$. Beginnend mit einem Startwert $x_0\in(a,b)$ versuchen wir eine Folge (x_n) durch die Vorschrift

$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\forall\ n\in\mathbb{N}_0$ zu definieren. Dies gelingt nur, wenn x_n keine Nullstelle von f' ist und deshalb nehmen wir an, dass das Intervall $[a,b]$ bereits so klein ist, dass f' dort keine Nullstelle hat. Setzt man dann $\Phi(x)=x-f(x)/f'(x)$, so ist offenbar $\Phi(\eta)=\eta$. Falls f sogar 2 mal differenzierbar auf (a,b) ist, dann ist dort Φ wenigstens einmal differenzierbar und

$$\Phi'(x)=1-\frac{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=f(x)f''(x)/(f'(x))^2\ \forall\ x\in(\eta-\delta,\eta+\delta).$$

Wir setzen voraus, dass $|\Phi'(x)|\leq\alpha<1$ gilt $\forall\ x\in(a,b)$ (dies gilt sicher, falls Φ' stetig und das Intervall (a,b) klein genug ist, denn $\Phi'(\eta)=f(\eta)f''(\eta)/(f'(\eta))^2=0$). Aus dem Mittelwertsatz folgt dann $|x_{n+1}-\eta|=|\Phi(x_n)-\eta|\leq\alpha|x_n-\eta|$. Mit dieser Abschätzung folgt wegen $\alpha<1$, dass alle $x_n\in(a,b)$ liegen und dass die Folge (x_n) gegen η konvergiert(dies wird ausführlicher später behandelt). Dieses Newtonverfahren konvergiert im Allgemeinen deutlich schneller als das Bisektionsverfahren oder die regula falsi. Z.B. ergeben sich für $f(x)=\cos x$ und $\cos x_0=1{,}6$ die Werte $x_1=1{,}570788$, $x_2=1{,}5707963$ und der 2. Wert stimmt bereits mit $\pi/2$ in allen angegebenen Stellen überein.

A5.2.2 Gib eine geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes

A5.2.3 Benutze den Mittelwertsatz, um eine Abschätzung für $\sin(1{,}005)$ zu erhalten, wenn der Wert für $\sin 1$ (z.B aus einer Wertetabelle) bekannt ist.

A5.2.4 Zeige, dass das Newtonverfahren, angewandt auf $f(x)=x^2-a$, gerade der Quadratwurzeliteration entspricht.
Finde selber das analoge verfahren zur Berechnung von $\sqrt[n]{a}$

A5.2.5 Warum ist folgendes Argument kein Beweis für den 2. Mittelwertsatz: Nach dem 1. Mittelwertsatz gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. Dasselbe gilt auch für g anstelle von f und daraus folgt S5.2.4

Löstip:Andere Funktion... anderes ξ

A5.2.6 Zeige:Die Funktion $f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & (x\neq 0)\\ 0 \quad . & (x=0)\end{cases}$ ist in jedem Punkt von $\mathbb{R}$ (also auch im Nullpunkt) differenzierbar, aber die Ableitung ist nicht stetig im Punkt x=0.

Lös:$x\neq 0$: $f'(x)=2x\sin(1/x)-(1/x^2)x^2\cos(1/x)\#=2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$

(** $\lim\limits_{x\to x_0}\cos(1/x)$ existiert nicht)

x=0: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-0}=\#\dfrac{x^2\sin(1/x)-0}{x-0}=\#\ x\sin(1/x)\underset{x\to 0}{\rightarrow}0$ da $(\sin(1/x)\leq 1)$

differenzierbar $\Rightarrow f'(0)=0$

** daher Ableitung unstetig, $2x\sin(1/x)\to 0$

*? nimmt jeden Wert an...Ableitung hat keine Sprungstellen

A5.2.7 Zeige: Ist die Funktion f in I=(a,b) differenzierbar und die Ableitung f' monoton, so ist f in I stetig differenzierbar.

//**S5.2.8** (2808)Zwischenwertsatz von Darboux für Ableitungen//
//Vor:Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ differenzierbar auf I. //
// Sei a<b, $a,b\in I$ und $f'(a)\neq f'(b)$.//
// Beh:$\forall\ \eta: f'(a)\leq\eta\leq f'(b)\ \exists\ \xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=\eta$.//

Achtung Lösung habe ich nicht ganz verstanden, enthält evt Schreibfehler? muss neu bearbeitet werden!!!!!!

Lös:Annahme f' nicht stetig, d.h. $\exists\ x_0\in(a,b)$ mit $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x_0)$

o.B.d.A. $f'(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ (für x_0^+ Bew entsprechend).

O.B.d.A. f' monoton wachsend (fallend…statt <, >). Dann gilt $\forall\ \xi<x_0,\ \forall\ \zeta>x_0,\ f'(\xi)\leq\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)\underset{!}{\leq} f'(x_0)\leq\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)\leq f'(\zeta)$ im Widerspruch zum Zwischenwertsatz, da f auf $[x_1,x_2]$, $x_1>a$, $x_2<b$ differenzierbar.

A5.2.8 Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

$f(a,b)\to\mathbb{R}$ stetig auf (a,b) differenzierbar $\Rightarrow \exists\ \xi\in(a,b): \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

a) $\lim_{n\to 0} n(1-\cos(1/n))=0$

//**S5.2.4**(2804)Erweiterter Mittelwertssatz der Differentialrechnung//
//Vor:(.)$a<b$, f,g: $[a,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar//
// auf(a,b). //
// (..)$g(b)-g(a)\neq 0$ und $g'(x)\neq 0\ \forall\ x\in(a,b)$,//
//Beh:Gilt (.) so $\exists\ \xi\in(a,b)$: $f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a))$.
// Gilt zusätzlich (..) so folgt $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.//

Lös: $\lim_{n\to 0} n(1-\cos(1/n))=-\lim_{n\to 0}\frac{\cos 0-\cos(1/n)}{0-1/n}\ \underbrace{\overset{S5.2.3}{=}}_{f=\cos,\ f'=\sin}\ \lim_{n\to 0}\sin\xi_n \overset{\text{sin stetig}}{=} \sin 0=0\ \underbrace{\Rightarrow}_{\text{MWS}}$

$\exists\ \xi\in(0,1/n)$, dann $\lim_{n\to 0}\xi_n=0$

b) $\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$, $a>0$, $\beta\neq 0$

//**S5.2.3**(2803)(Mittelwertsatz der Differentialrechnung)//
//Vor:$a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b)//
//Beh: $\exists$ mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$//

//**S5.2.4**(2804)Erweiterter Mittelwertssatz der Differentialrechnung//
//Vor:(.)$a<b$, f,g: $[a,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar//
// auf(a,b). //
// (..)$g(b)-g(a)\neq 0$ und $g'(x)\neq 0\ \forall\ x\in(a,b)$,//
//Beh:Gilt (.) so $\exists\ \xi\in(a,b)$: $f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a))$.
// Gilt zusätzlich (..) so folgt $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.//

*//**S4.2.3**(2307) Grenzwertregeln*
//1.) $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=b \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)=a/b$ *(falls $b\neq 0$)//*

Lös: $\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=\lim_{x\to\alpha}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x-a}\ \frac{x-a}{x^\beta-a^\beta}=\left(\lim_{x\to\alpha}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x-a}\right)\left(\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{x^\beta-a^\beta}{x-a}\right)^{-1}\right)$

Falls auf der rechten Seite beide lim existieren

$\frac{\overbrace{x^\alpha}^{f(b)}-\overbrace{a^\alpha}^{f(a)}}{\underbrace{x}_{b}-\underbrace{a}_{a}}=f'(\xi_x)\ \underbrace{\overset{S5.2.2}{=}}_{f'(a^\alpha)=0,\ f'(a)=0}\ \alpha\,\xi_x^{\alpha-1}$ ($y\to y^{\alpha-1}$ stetig) $\alpha\,\xi_x^{\alpha-1}\ \underset{\xi_x\to a}{\to}\ \alpha a^{\alpha-1}$

(MWS $f(x)=x^\alpha$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$, $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, $x\to a$, $x<\xi_a<a$,
$a<\xi_a<x$ MWS $\exists\ \xi_a$, $\lim_{x\to a}\xi_a=a$)

$\frac{x^\beta-a^\beta}{x-a}\to\beta a^{\beta-1}\neq 0$, $\frac{x^\beta-a^\beta}{x-a}\to\frac{1}{\beta a^{\beta-1}}$, $\lim_{x\to\alpha}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=\alpha a^{\alpha-1}=\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$