S5.1.5*(2711) Fortsetzung*

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)^n=\sin z=\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$, $f'(z)=\cos x=\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z-z_0)^n$

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)^n=\sin z=\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}=$

$$z \quad \frac{z^3}{3!}+ \quad \frac{z^5}{5!} \quad -\frac{z^7}{7!}+-\ldots=$$

n=	0	1	2	3	4	5	6	7	2m	2m+1
$a_n(z)^n$ =	$0*z^0$	$(-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{1!}z$	$0*z^2$	$(-1)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{3!}z^3$	$0*z^4$	$(-1)^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{5!}z^5$	$0*z^6$	$(-1)^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{7!}z^7$	$..0*z^{2m}$	$(-1)^{\frac{2m+1}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{2(m+1)!}z^{2m+1}$
a_n =	0	$(-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{1!}$	0	$(-1)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{3!}$	0	$(-1)^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{5!}$	0	$(-1)^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{7!}$ …	0	$(-1)^{\frac{2m+1}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{2(m+1)!}$
$na_n(z)^{n-1}$=	0	$1*(-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{1!}z^1$	0	$3(-1)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{3!}z^2$	0	$5(-1)^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{5!}z^4$	0	$7(-1)^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{7!}z^6$…	0	$(2m+1)(-1)^{\frac{2m+1}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{2(m+1)}z^{2m}$
	0	$(-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{1!}z^1$	0	$(-1)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{2!}z^2$	0	$(-1)^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{4!}z^4$	0	$(-1)^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{6!}z^6$…	0	$(-1)^m\frac{1}{2m!}z^{2m}$

⇒ Induktionshypothese (IH)

n gerade, d.h. n=2m: $na_n(z)^{n-1}=0$, n ungerade, d.h. n=2m+1: $na_n(z)^{n-1}=(-1)^m\frac{1}{2m!}z^{2m}$

Induktion m→m+1

zu beweisen: Für m+1 gilt bei n=2m: $na_n(z)^{n-1}=0$ und : $na_n(z)^{n-1}=(-1)^{m+1}\frac{1}{2(m+1)!}z^{2(m+1)}$

n=2(m+1) ⇒ gerade $\underset{IH}{\Rightarrow}$ $na_n(z)^{n-1}=0$ und n=2(m+1)+1 $na_n(z)^{n-1}\underset{IH}{=}(2(m+1)+1)(-1)^{\frac{2(m+1)+1}{2}-\frac{1}{2}}\frac{1}{2(m+1)+1!}z^{2(m+1)}\underset{IH}{=}$

$(2m+3)(-1)^{m+1}\frac{1}{(2(m+1)+1)!}z^{2(m+1)}=(-1)^{m+1}\frac{1}{2(m+1)!}z^{2(m+1)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z)^{n-1}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(2(\nu-1))!}z^{2(\nu-1)}=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4\ldots=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}=\cos x$$