5(2700) Differentialrechnung$_{\mapsto}$

5.1(2700) Der Begriff der Ableitung und Differentiationsregeln

D5.1.1 (2700)

*//**D4.1.1'**(2002) $M\subset \mathbb{C}$, $M\neq\emptyset$, $z_0\in\mathbb{C}$, $\delta>0$, $U_\delta(z_0):=\{z\in \mathbb{C} / |z-z_0|<\delta\}$,*

// $\overset{o}{U}_\delta(z_0):= U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in \mathbb{C}/0<|z-z_0|<\delta\}$.//

//1.) $z_0\in M$ heißt innerer Punkt von M:$\Leftrightarrow$ $\exists$ $\delta>0$ mit $U_\delta(z_0)\subset M$.//

// $\overset{o}{M}$ sei die Menge aller inneren Punkte von M//

//3.) $z_0\in K$ heißt Häufungspunkt(HP) von M:$\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ ist $M\cap \overset{o}{U}_\varepsilon(z_0)\neq\emptyset$.

//4.) M' sei die Menge aller HP von M

//**D4.2.1**(2300) Sei $M\subset\mathbb{R}$, $x_0\in M'$, d.h. x_0 ist HP, und $f:M\to\mathbb{R}$ gegeben//

//1.) f(x) konvergiert gegen $a\in\mathbb{R}$ für $x\to x_0$:$\Leftrightarrow$ //

// $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta_\varepsilon>0$ mit $f(x)\in U_\varepsilon(a)$ $\forall$ $x\in M\cap \overset{o}{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$.//

// ($\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta_\varepsilon>0$: $|f(x)-a|<\varepsilon$ $\forall$ $x\in M$ mit $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$).//

// Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ oder $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} a$.//

1.) • Vor: $M\subset\mathbb{C}$, $z_0\in \overset{o}{M}$, $f: M\to\mathbb{C}$ gegeben.

Aussage: (.) Die Funktion f heißt differenzierbar in z_0:$\Leftrightarrow$

$$\exists \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=:f'(z_0) \quad \text{(s.D4.2.1)}$$

und dann heißt der Grenzwert $f'(z_0)\in M$ die Ableitung von $f(z)$ in $z=z_0$ (oder an der Stelle z_0).

\# $z_0\in\overset{o}{M}$: $\exists$ $z\in U_\delta(z_0)\subset M$ aber $z_0\in M/\overset{o}{M}$: $\exists$ $z\in U_\delta(z_0)$, $U_\delta(z_0)\not\subset M$ $\Rightarrow$

\# $\exists$ $z\in U_\delta(z_0)$: $z\notin M$ $\Rightarrow$ $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ nicht definiert für diese z $\Rightarrow$

\# Daher Vor: $z_0\in\overset{o}{M}$???

(..) Die Funktion f heißt differenzierbar auf $D\subset\overset{o}{M}$:$\Leftrightarrow$

$\exists$ $f'(z)$ $\forall$ $z\in D$ und dann heißt

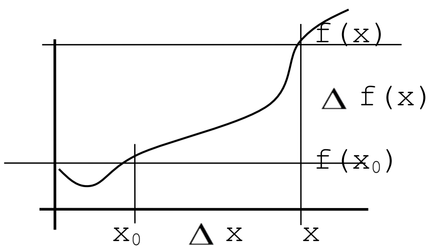
$f':D\to\mathbb{C}$, $z\mapsto f'(z)$ die Ableitung von f auf D.

\# $D\subset\overset{o}{M}$? Damit z.B. geschlossenes Intervall $D:=[1,2]\subset(0,3)$, in

\# dem f definiert ist, möglich wird????

Schreibweise: $f'(z_0)=:\dfrac{df}{dz}(z_0)=\dfrac{d}{dz}f(z)\Big|_{z=z_0}=:f'(z)\Big|_{z=z_0}$.

Skizze/Bsp in $M\subset R\subset C$



$\Delta x=x-x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

$\Delta f=f(x)-f(x_0)$

• Vor: $D\subset\overset{o}{M}\subset R$, $x_0\in\overset{o}{M}$, $f: M\to R$ gegeben.

Aussage: Ist $[x_0,x_0+\delta)\subset D$ oder $(x_0-\delta,x_0]\subset D$, so heißt f rechtsseitig (linksseitig) differenzierbar in x_0:⇔

$\exists \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'_+(x_0)$=rechtsseitige Ableitung

($\exists \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'_-(x_0)$=linksssseitige Ableitung)

Bem:(.)Eine Funktion $f:I\to R$ ist differenzierbar genau dann, falls $f'_+(x_0)$ und $f'_-(x_0)$ existieren und gleich sind.

(..)Eine Funktion $f:U_\delta(z_0)\to C$, mit $z_0\in C$, $\delta>0$ heißt komplex differenzierbar in $z^*\in U_\delta(z_0)$, falls $\lim\limits_{z\to z^*} \frac{f(z)-f(z^*)}{z-z^*}$ existiert.

$f'(z^*)=\lim$....Falls $z^*\in \mathbb{R}\cap U_\delta(z_0)$ und $f'(z^*)$ existiert, so existiert auch die reelle Ableitung der Funktion bei z^* und die Ableitungen stimmen überein.

Bsp:(.)$f(x)=ax+b$, $a,b,x,x_0\in R$. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{a(x-x_0)}{x-x_0}=a \ \forall\ x\neq x_0$.

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert und $f'(x)=a$, $f':R\to R$, $x\to a$

(..)$f(x)=x^n$, $D=\mathbb{R}$, $n\in N$, $x_0\in\mathbb{R}$.

//S1.7.2 (903)a,b∈C, n∈N₀: 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum\limits_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$//

$\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} x^\nu x_0^{n-1-\nu} \xrightarrow{x\to x_0} \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} x_0^\nu x_0^{n-1-\nu}=nx_0^{n-1}$.

$f(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x)=nx^{n-1}$.

(...)$f(x)=|x|$, $D=\mathbb{R}$. f ist differenzierbar für $x_0\neq 0$ und

$f'(x_0)=\begin{cases} 1, x_0>0 \\ -1, x_0<0 \end{cases}$. f ist nicht differenzierbar bei $x_0=0$

weil $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{|x|-0}{x}=1\neq \lim\limits_{x\to 0_-} \frac{|x|-0}{x}=-1$

2.) Die höheren Ableitungen von f sind induktiv folgendermaßen induktiv definiert: Sei $M\subset\mathbb{C}$, $f: M\to\mathbb{C}$ gegeben.
Für $z_0\in M$ sei $f^{(0)}(z_0):=f(z_0)$.
Sei $U_\delta(z_0)=\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|<\delta\}\subset M$ (in $\mathbb{R}$: $U_\delta(x_0)=(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset M$).
Ist $n\in N$ und $\exists\ f^{(n-1)}(z)\ \forall\ z\in U_\delta(z_0)$, dann heißt
f n-mal differenzierbar in z_0: $\Leftrightarrow$ $f^{(n-1)}(z)$ ist in z_0 differenzierbar, d.h.

$$\exists \lim_{z\to z_0}\frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(z_0)}{z - z_0} =: f^{(n)}(z_0)\in\mathbb{C} \text{ bzw.}$$

$$\exists\ f^{(n)}(z_0):=\frac{d}{dz}f^{(n-1)}(z)\Big|_{z=z_0}=(f^{(n-1)}(z))'_{z=z_0}.$$

//**D4.1.1**(2200) Für $x\in\mathbb{R}$ und $\delta>0$ sei //
// $U_\delta(x_0):=\{x\in\mathbb{R}|\,|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta, x_0+\delta)=\delta$-Umgebung von x_0 in $\mathbb{R}$.//
//*Sei $M\subset R$, $M\neq\emptyset$.*//
//1.) $x_0\in M$ heißt innerer Punkt von M: $\Leftrightarrow$ $\exists\ \delta>0$ mit $U_\delta(x_0)\subset M$.//
// $\overset{\circ}{M}$ sei die Menge aller inneren Punkte von M //
// $\overset{\circ}{M}$ =offener Kern von M. //
// M heißt offen: $\Leftrightarrow$ $M=\overset{\circ}{M}$.//
Die Funktion f heißt n-mal differenzierbar auf der offenen Menge $\overset{\circ}{D}\subset M$: $\Leftrightarrow$ $\exists\ f^{(n)}(z)\ \forall\ z\in\overset{\circ}{D}$ und dann heißt $f^{(n)}:\overset{\circ}{D}\to\mathbb{C}$ die n-te Ableitung von f auf $\overset{\circ}{D}$.

Schreibweise: $f^{(n)}(z_0)=:\dfrac{d^n}{dz^n}f(z_0)=:\dfrac{d^n}{dz^n}f(z)\Big|_{z=z_0}$.

Sei $M\subset\mathbb{R}$, $z_0\in\overset{\circ}{M}$ und $f:M\to M$, $[x_0, x_0+\delta)\subset M$ oder $(x_0-\delta, x_0]\subset M$. gegeben
Ist $n\in N$ und $\exists\ f^{(n-1)}(x)$ auf $[x_0, x_0+\delta)$ bzw. $(x_0-\delta, x_0]$, wobei in x_0,
die rechtsseitige (n-1)-te Ableitung $f_+^{(n-1)}(x_0)$ bzw.
die linkseitige (n-1)-te Ableitung $f_-^{(n-1)}(x_0)$ existiere,
so heißt f in x_0 n-mal rechtsseitig (linksseitig) differenzierbar: $\Leftrightarrow$

$$\exists \lim_{x\to x_0^+}\frac{f^{(n-1)}(x) - f_+^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} =: f_+^{(n)}(x_0) = \text{n-te rechtseitige Ableitung von f in } x_0 \text{ mit } f^{(n)}(x_0)=:f_+^{(n)}(x_0)$$

$$\exists \lim_{x\to x_0^-}\frac{f^{(n-1)}(x) - f_-^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} =: f_-^{(n)}(x_0) = \text{n-te linksseitige Ableitung von f in } x_0 \text{ mit } f^{(n)}(x_0)=:f_-^{(n)}(x_0)).$$

3.) $M\subset\mathbb{C}$, $f:M\to\mathbb{C}$ heißt auf offenem $D\subset M\subset\mathbb{C}$ n-mal stetig differenzierbar: $\Leftrightarrow$
$\exists\ f^{(n)}(z)\ \forall\ z\in D$ und $f^{(n)}(z)$ ist stetig auf D (wobei in $\mathbb{R}$ in Intervallendpunkten $f^{(n)}(x):=f_+^{(n)}(x)$ bzw. $f^{(n)}(x):=f_-^{(n)}(x)$ sei)

Andere Formulierungen (in $\mathbb{R}$):
Es seien eine Funktion $f:I\to R$, ein Punkt $x_0\in I$ und ein $n\in N$ gegeben. Wir sagen:

(.) f ist 2 mal diffb in $x_0\in I$, falls für ein $\delta>0$, $f'(x)$ auf $U_\delta(x_0)$ existiert und ferner die Ableitung von $f'(x)$ bei x_0 existiert.
Wir schreiben für dies $f''(x_0)=\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)\,\Big|_{x=x_0}$

(..) (induktiv) f ist n mal diffb in x_0, falls für ein $\delta>0$, $f^{(n-1)}(x)$ bei x_0 existiert. Wir schreiben $f^{(n)}(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\,\Big|_{x=x_0}=\left(\frac{d}{dx}\right)^{(n-1)} f'(x)\,\Big|_{x=x_0}$.

(…) f ist n mal stetig diffb auf I (kurz: $f\in\mathbb{C}^n(I)$), falls f n mal diffb ist $\forall\, x\in I$ und $f^{(n)}:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I ist.

(....) f ist beliebig oft diffb auf I (kurz $f\in\mathbb{C}^\infty(I)$), falls $f\in\mathbb{C}^n(I)$) $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Bem: Wir schreiben $f\in\mathbb{C}(I)$, falls $f:I\to\mathbb{R}$ stetig ist.

Bem: 1.) Für $x_0\in \overset{\circ}{M}\subset\mathbb{C}$ und $f:M\to\mathbb{C}$ gilt $\exists\, f'(z_0) \Leftrightarrow$
$\exists\, f_+'(z_0)$ und $\exists\, f_-'(z_0)$ und es gilt $f_+'(z_0)=f_-'(z_0)=f'(z_0)$

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0^+}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0^-}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},\quad z_0\in\overset{\circ}{M}$$

2.) Für $x_0\in \overset{\circ}{M}\subset\mathbb{C}$, $f:M\to\mathbb{C}$ gilt $\exists\, f'(z_0) \Leftrightarrow$
$\exists\, (\mathrm{Re}\, f)'(z_0)$ und $\exists\, (\mathrm{Im}\, f)'(z_0)$ und es gilt
$f'(z_0)=(\mathrm{Re}\, f)'(z_0)+i(\mathrm{Im}\, f)'(z_0)$.

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\mathrm{Re}f(z)-\mathrm{Re}f(z_0)}{z-z_0}+i\,\frac{\mathrm{Im}f(z)-\mathrm{Im}f(z_0)}{z-z_0},$$

$z=x+iy$, $|x|,|y|\le|z|\le|x|+|y|$,
$z\to\zeta_0: f'(z_0)=(\mathrm{Re}\, f(z_0))'_{z=z_0}+i(\mathrm{Im}\, f(z_0))'_{z=z_0}$

Andere Formulierungen:

Hier wird $\mathbb{K}$ für Körper ($\mathbb{C}$ ist Körper) verwendet.

Sei $z_0 \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $U_r(z_0)=\{z \in \mathbb{K}: |z-z_0|<r\}$, $f: U_r(z_0) \to \mathbb{K}$.

Für $z \in U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, $h=z-z_0 \neq 0$ heißt $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$,

der Differenzenquotient von f im Punkt z_0. Im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ist der Differenzenquotient gleich der Steigung der Sekante durch die Punkte $z,f(z))$ und $(z_0,f(z_0)$ des Graphen von f.

Falls der Grenzwert des Differenzenquotienten für $z \to z_0$ existiert, heißt er auch die (erste) Ableitung von f im Punkt z_0, und wir nennen f auch differenzierbar im Punkt z_0 und schreiben

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ interpretieren wir die Ableitung als die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt x_0.

Sei $D \subset \mathbb{K}$ gegeben. Wir nennen ein $f:D \to \mathbb{K}$ auf D differenzierbar, wenn es zu jedem $z_0 \in D$ ein $r>0$ gibt, für welches $U_r(z_0) \subset D$ ist und falls weiter f in jedem Punkt von D differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so ist die Ableitung f' wieder eine auf D definierte Funktion. Diese Funktion kann selbst wieder in einem Punkt(oder allen Punkten) von D differenzierbar sein . Der Wert der Ableitung von f' in einem Punkt $z_0 \in D$ heißt dann auch die 2. Ableitung oder die Ableitung 2. Ordnung von f an dieser Stelle. Entsprechend werden höhere als 2. Ableitungen von f definiert. Wir schreiben dann auch

$f''(z)$, $f'''(z)$, $f^{(n)}(z)$ oder $\frac{d^2}{dz^2}f(z)$, $\frac{d^3}{dz^3}f(z)$, $\frac{d^n}{dz^n}f(z)$ für den Wert der 2., 3. ,nten Ableitung von f im Punkte z.

Wenn eine Funktion f auf D n mal differenzierbar und die nte Ableitung noch stetig ist, sagen wir auch: f ist mindestens n mal stetig differenzierbar auf D. Beachte, dass die Stetigkeit der Ableitungen der Ordnungen $\leq n-1$ aus S5.1.1 (siehe unten) folgt, nicht aber die der nten Ableitung.

Wenn eine Funktion auf D Ableitungen von jeder Ordnung besitzt, nennen wir sie auch beliebig oft differenzierbar.

Seien $a<b$ und $f:[a,b] \to R$ gegeben. Wir sagen:

f ist im Punkt a rechtseitig differenzierbar, wenn $\lim_{h \to 0_+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

existiert und wir nennen seinen Wert die rechtsseitige Ableitung von f im Punkt a.

Analog definieren wir die linksseitige Ableitung/Differenzierbarkeit im Punkt b.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall. Falls $f:I \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt von I differenzierbar ist, wobei wir in evt Randpunkten die entsprechende einseitige Differenzierbarkeit meinen, dann sagen wir auch: f ist auf I differenzierbar.

S5.1.1(2704)

Eine Funktion $f:I\to\mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $x_0\in I$, wenn ein $c\in\mathbb{R}$ und eine Funktion $\varepsilon(x):I\to\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ existiert, sodass gilt:

* $f(x)=f(x_0)+c(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0)$. Dann ist $c=f'(x_0)$

Bew:Setze $\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-c, & x\neq x_0\\ 0, & x=x_0\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=c+\varepsilon(x)$

Gilt $\varepsilon(x)\underset{x\to x_0}{\rightarrow}0$ in *, so hat rechte Seite hat Limes c,

d.h. $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x)=c$.

Ist f differenzierbar in x_0 so gilt * mit $c=f'(x_0)$ und $\varepsilon(x)\underset{x\to x_0}{\rightarrow}0$.

Andere Formulierung (auch für $\mathbb{C}$):

$f:M\to\mathbb{C}$ ist in $z_0\in\overset{o}{M}$ differenzierbar $\Leftrightarrow$

$\exists$ $c\in\mathbb{C}$ und $\varepsilon(z):M\to\mathbb{C}$ mit $\varepsilon(z):=0$, ε stetig in z_0 und

$f(z)=f(z_0)+c(z-z_0)+\varepsilon(z)(z-z_0)\ \ \forall\ z\in M$, wobei $c=f'(z_0)$.

Bew: $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=:f'(z)$, $z_0\in\overset{o}{M}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)=:\varepsilon(z)$, $\forall\ z\in M\backslash\{z_0\}$.

Sei $\varepsilon(z_0):=0$, ε stetig in z_0, d.h. $\varepsilon(z)\underset{z\to z_0}{\rightarrow}0$ $\Leftrightarrow$

$f(z)=f(z_0)+\underbrace{f'(z_0)(z-z_0)}_{f(z)-f(z_0)}+\underbrace{\varepsilon(z)\ (z-z_0)}_{=f(z)-f(z_0)-f(z)+f(z_0)}$, $\varepsilon(z_0)=0$, $\varepsilon(z)\underset{z\to z_0}{\rightarrow}0$

//**S5.1.1**(2703)
//Eine Funktion $f:I\to\mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $x_0\in I$, wenn ein $c\in\mathbb{R}$
//und eine Funktion $\varepsilon(x):I\to\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ existiert, sodass gilt:
//* $f(x)=f(x_0)+c(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0)$. Dann ist $c=f'(x_0)$
//oder
//# $f:I\to\mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0\in I \Leftrightarrow$
//# $\exists\ c=f'(x_0)\in\mathbb{R}$ & Funktion $\varepsilon(x):I\to\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$:
//# $f(x)=f(x_0)+c(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0)$

#Eigener Versuch:

#"⇒" $f:M\to\mathbb{C}$ ist in $z_0\in\overset{\circ}{M}$ differenzierbar $:\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=:f'(z_0)=c \Rightarrow$

$\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)=:\mathcal{E}(z)\underbrace{\overset{f\ diffb,\ D5.1.1}{\longrightarrow}}_{z\to z_0}0\ \ \forall\ z\in M\setminus\{z_0\}\ \underbrace{\Rightarrow}_{*(z-z_0)}$

$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\mathcal{E}(z)(z-z_0)\Rightarrow f(z)=f(z_0)+c(z-z_0)+\mathcal{E}(z)(z-z_0)\ \ \forall\ z\in M$

#"⇐" $f(z)=f(z_0)+c(z-z_0)+\mathcal{E}(z)(z-z_0)$, $c=f'(z_0)$, $\mathcal{E}(z)\underbrace{\to}_{z\to z_0}0$

$\Rightarrow f(z)-f(z_0)=c(z-z_0)+\mathcal{E}(z)(z-z_0)\Rightarrow$

$f'(z_0)=(\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=c+\lim\limits_{z\to z_0}\underbrace{\mathcal{E}(z)}_{z\to z_0\to 0}=c\Rightarrow\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$, $\forall\ z\in M$.

S5.1.2(2705) Ist eine Funktion $f:I\to\mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.
Bem:Stetigkeit $\nRightarrow$ Differenzierbarkeit!
(Bsp $f(x)=|x|$ bei $x_0=0$, $f'_+(0)=+1$ $f'_-(x_0)=-1$)

//**S5.1.1** * $f(x)=f(x_0)+c(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0)$. $c=f'(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$

//S1.2.1 (406) Vor: K angeordnet, a,b∈K//
//● *Beh: 3.)*$|ab|=|a||b|$//
//● 6.)$|a+b|\le|a|+|b|$ (Dreiecksungleichung) //

Bew:Es gilt * mit $\varepsilon(x)\underbrace{\to}_{x\to x_0}0$, d.h. zu $\varepsilon=1\ \exists\ \delta:|\varepsilon(x)-0|<1\ \ \forall\ x\in U_\delta(x_0)\cap I$.
*: $|f(x)-f(x_0)|=|f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0)|=$
$|(x-x_0)(f'(x_0)+\varepsilon(x))|\underbrace{=}_{S1.2.1\ 3.)}|x-x_0||f'(x_0)+\varepsilon(x)|\le$
$|x-x_0|(|f'(x_0)|+|\varepsilon(x)|)\le(|f'(x_0)|+1)|x-x_0|$ in $U_\delta(x_0)\cap I$.

Bew:Es gilt * mit $\varepsilon(x)\underbrace{\to}_{x\to x_0}0$, d.h. zu $\varepsilon=1\ \exists\ \Delta:|\varepsilon(x)-\underbrace{\epsilon(x_0)}_{=0}|<1\ \ \forall\ x\in U_\Delta(x_0)\cap I$.

*: $|f(x)-f(x_0)|=|f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0)|=$

$|(x-x_0)(f'(x_0)+\varepsilon(x))|\underbrace{=}_{S1.2.13.)}|x-x_0||(f'(x_0)+\varepsilon(x)|\underbrace{\le}_{S1.2.16.)}$

$|x-x_0|(|f'(x_0)|+|\varepsilon(x)|)\le(|f'(x_0)|+1)|x-x_0|\le|f'(x_0)||x-x_0|\Rightarrow$

$|f(x)-f(x_0)|\le c|x-x_0|$ in $U_\Delta(x_0)\cap I\Rightarrow|x-x_0|<\min\{\Delta,\dfrac{\varepsilon}{c}\}=\delta:|f(x)-f(x_0)|\le c*\dfrac{\varepsilon}{c}=\varepsilon$

$\Rightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\min\{\Delta,\dfrac{\varepsilon}{c}\}=\delta>0:|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \ \forall\ x\in D$ mit $|x-x_0|<\delta$

Andere Formulierung

$f:M\to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ist in $z_0\in \overset{\circ}{M}$ differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig in z_0

*//**D4.3.1'**(2401)//*
//Sei $D\subset\mathbb{R}$. Dann heißt $f: D\to\mathbb{R}$, stetig im Punkt $z_0\in D$:$\Leftrightarrow$ //
//$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0: f(z)\in U^{\varepsilon}(f(z_0))\ \ \forall\ z\in D\cap U_\delta(z_0)$//
*//***($\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon\ \ \forall\ z\in D$ mit $|z-z_0|<\delta$).//*
//f heißt stetig auf $A\subset D$:$\Leftrightarrow$ f ist in jedem $z_0\in A$ stetig.//
//Bem:Ist $z_0\in D\cap D'$, so ist f stetig in $z_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.//

Bew: $|f(z)-f(z_0)|=|c+\underbrace{\varphi(z)}_{\to 0}||z-z_0|=\underbrace{\Delta}_{<\infty}|z-z_0| \Rightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $\delta<\dfrac{\varepsilon}{\Delta}$:

$\varepsilon>|f(z)-f(z_0)|$ für $|z-z_0|<\delta \underset{D4.3.1}{\Rightarrow} \Rightarrow$ f stetig in z_0

S5.1.3(2706)

1.) Ist $c\in\mathbb{K}$ und ist $f(z)=c\ \forall\ z\in\mathbb{K}$, so ist f in jedem Punkt $z\in\mathbb{K}$ differenzierbar und $f'(z)=0$ für alle diese z.

Bew: Der Differentialquotient hat immer denselben Wert 0, also folgt die Beh.

2.) Ist $f(z)=z\ \forall\ z\in\mathbb{K}$, so ist f in jedem Punkt $z\in\mathbb{K}$ differenzierbar und $f'(z)=1$ für alle diese z.

Bew: Der Differentialquotient hat immer denselben Wert 1, also folgt die Beh.

3.) Die Funktion $x\mapsto|x|$ ist im Nullpunkt nicht differenzierbar

Bew: Der Wert des Diffenzenquotienten für $h>0(h<0)$ ist gleich 1 bzw -1 und daraus folgt die Beh.

//**S3.5.2**(2001)*Zu jeder Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *∃ genau eine Zahl R mit*
// *0≤R≤∞, der <u>Konvergenzradius</u> (KR) der PR, mit der Eigenschaft:*

$$// \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \begin{cases} \text{konvergiert absolut } \forall\, z\in C \text{ mit } |z-z_0|<R \\ \text{divergiert} \quad \forall\, z\in C \text{ mit } |z-z_0|>R \end{cases}$$

// *Ferner gilt* $R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, $\frac{1}{0}:=\infty$, $\frac{1}{\infty}:=0$

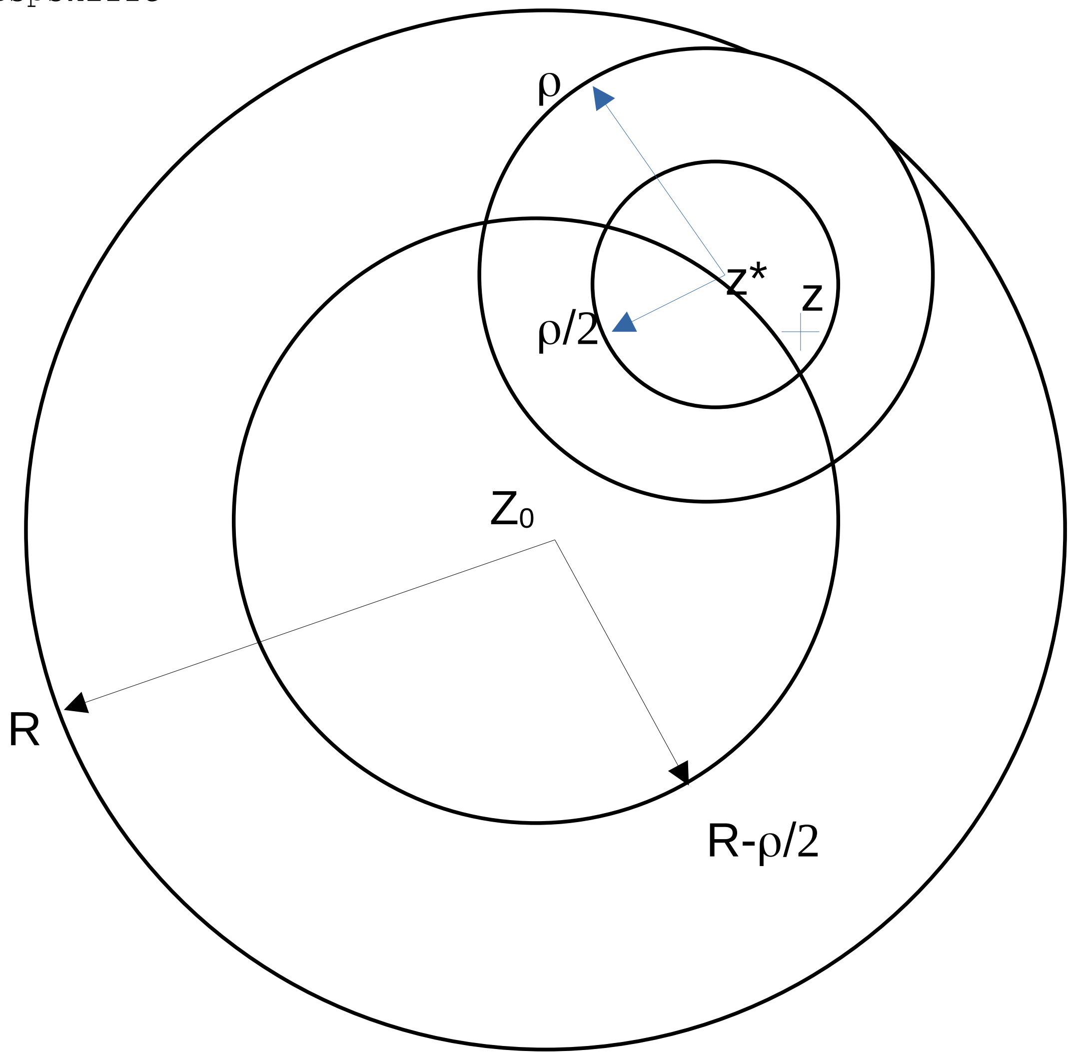
S5.1.4(2707) Vor:PR $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ mit $z,z_0\in C$ und KR R>0.

Beh: $f(z):=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, $z\in U_R(z_0)$ dort differenzierbar mit Ableitung

$$f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(z-z_0)^{k-1}.$$

Bem:(.)Die abgeleitete Funktion hat denselben KR R.
(..)Eine reelle PR ist reell differenzierbar in ihrem Konvergenzintervall

Bspskizze



Empfehlung: Skizze ausdrucken, dann Beweis lesen (Z_C in Z_0 ändern)

Teils eigene Betrachtungen mit Hilfe von Vorlesungsaufzeichnungen:

*//**S3.5.6**(2050)Vor:Die PR* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *hat KR R//*

// 1.) $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ *hat auch R//*

Bew:# nach 3.5.6 haben

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k(z-z_0)^{k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^2(z-z_0)^{k-2}$ gleiche R

Sei $z^*\in U_R(z_0)$, $|z^*-z_0|=R-\rho$ mit $\rho\in(0,R)$. Für $|z-z^*|<\rho/2$ gilt
$|z-z_0|\# =|z-z^*+z^*-z_0|\le |z-z^*|+|z^*-z_0|<R-\rho+\rho/2$ $\#<R-\rho/2<R$ und

$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^2(z-z_0)^{k-2}|\le\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|k^2|z-z_0|^{k-2}\le\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|k^2|\underbrace{R-\rho/2}_{<R}|^{k-2}=\chi<\infty \quad \forall\ z\in U_{\rho/2}(z^*)$

Mit D5.1.1 1.)......

Die Funktion f heißt differenzierbar in z_0:⇔

$\exists \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=:f'(z_0)$ und z_0 habe die Bezeichnung z^*

$$|\frac{f(z)-f(z^*)}{z-z^*}-\sum_{k=1}^{\infty} a_k k(z^*-z_0)^{k-1}|=$$

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\frac{\overbrace{(z-z_0)^k-(z^*-z_0)^k}^{0\text{ für }k=0}}{z-z^*}-\sum_{k=1}^{\infty} a_k k(z^*-z_0)^{k-1}| \underbrace{=}_{(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}=a^{n+1}-b^{n+1}}$$

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k[\frac{((z-z_0)-(z^*-z_0))\sum_{\nu=0}^{k-1}(z-z_0)^{\nu}(z^*-z_0)^{k-1-\nu}}{\underbrace{z-z^*}_{(z-z_0)-(z^*-z_0)}}-\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{k(z^*-z_0)^{k-1}}_{\sum_{\nu=0}^{k-1}(z^*-z_0)^{k-1}}]|=$$

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sum_{\nu=0}^{k-1}((z^*-z_0)^{k-1-\nu}((z-z_0)^{\nu}-(z^*-z_0)^{\nu})\frac{(z-z^*)}{(z-z^*)}| \underbrace{=}_{(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}=a^{n+1}-b^{n+1}}$$

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sum_{\nu=1}^{k-1}(z^*-z_0)^{k-1-\nu}(\underbrace{\frac{\overbrace{(z-z_0)^{\nu}-(z^*-z_0)^{\nu}}^{0\text{ für }\nu=0}}{\underbrace{z-z^*}_{z-z_0-(z^*-z_0)}}}_{\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(z-z_0)^{\mu}(z^*-z_0)^{\nu-1-\mu}}(z-z^*)|\le$$

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sum_{\nu=1}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(z-z_0)^{\mu}(z^*-z_0)^{k-2-\mu}||z-z^*|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\sum_{\nu=1}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\underbrace{|z-z_0|^{\mu}}_{<=(R-\rho/2)^{\mu}}\underbrace{|z^*-z_0|^{k-2-\mu}}_{\le(R-\rho/2)^{k-2-\mu}})|z-z^*|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\underbrace{\sum_{\nu=1}^{k-1}\nu}_{<=k^2}\left(\underbrace{R-\rho}_{<R}/2\right)^{k-2}|z-z^*|=\kappa|z-z^*|\xrightarrow{z\to z^*}0$$

$$\lim_{z\to z^*}\frac{f(z)-f(z^*)}{z-z^*}=\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z^*-z_0)^{k-1}$$

Andere Formulierungen:
Gliedweises differenzieren von Potenzreihen

Sei $z, z_0 \in \mathbb{C}$ und eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ mit einem Konvergenzradius $R>0$ gegeben und sei f ihre Grenzfunktion. Dann ist f auf $U_R(z_0)$ differenzierbar und es gilt $f'(z)=\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z-z_0)^k \ \forall \ z \in U_R(z_0)$.

//**D1.7.1** (905) $n \in \mathbb{N}_0$, 6.) $\forall\ a,b,z \in \mathbb{C}\ \ n \in \mathbb{N}_0$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} a^k$$//

Bew: Aus $\sqrt[k]{k} \underset{k\to\infty}{\to} 1$ folgt, $\sqrt[k]{k|a_k|} = \underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\to 1} \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{|a_k|}$ und dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z-z_0)^k$ ebenfalls gleich R ist (siehe auch S3.5.6). Deshalb definiert diese Reihe auf $U_R(z_0)$ eine Funktion g, von der wir beweisen wollen, dass sie die Ableitung von f ist.
Durch eine Indexverschiebung folgt:

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1} \ \forall\ z \in U_R(z_0).$$

Sei $z \in U_R(z_0)$ festgehalten, $r=R-|z|<R$ und $h \in \mathbb{C}$ so, dass $|h|<r$ ist.

Wegen $(z+h-z_0)^k-(z-z_0)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (z-z_0)^{k-j} h^j - (z-z_0)^k =$

$$(z-z_0)^k \Big(\sum_{j=0}^{k} \underbrace{\binom{k}{j} (z-z_0)^{-j} h^j}_{=1 \text{ für } j=0} \Big) - 1) = (z-z_0)^k \Big(\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (z-z_0)^{-j} h^j \Big) =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (z-z_0)^{k-j} h^j = kh (z-z_0)^{k-1} + \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} (z-z_0)^{k-j} h^j$$ folgt, dass $f'(z)=g(x)$, weil

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z) = 1/h \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+h-x_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \Big) - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z-z_0)^k =$$

$$\sum_{k=1,0}^{\infty} a_k \frac{\overbrace{(z+h-z_0)^k - (z-z_0)^k}^{0 \text{ für } k=0}}{h} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z-z_0)^k =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (z-z_0)^{k-j} h^{j-1} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z-z_0)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} (z-z_0)^{k-j+1} h^{j-1} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z-z_0)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j+1} (z-z_0)^{k-j} h^j - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z-z_0)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j+1} (z-z_0)^{k-j} h^j - \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \binom{k+1}{1} (z-z_0)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j+1} (z-z_0)^{k-j} h^j - \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \sum_{j=0}^{0} \binom{k+1}{j+1} (z-z_0)^k =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j+1} (z-z_0)^{k-j} h^{j-1} = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} (z-z_0)^{k-1-(j-1)} h^{j-1} =$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} (z-z_0)^{k-j} h^{j-1} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z) \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} (z-z_0)^{k-j} h^{j-1} \right| \leq$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} |z-z_0|^{k-j} |h|^{j-1} \leq |h| * M \quad (|h|<r<R \text{ siehe oben}),$$

$$\text{mit } M = \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} |z-z_0|^{k-j} r^{j-2} < \# \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} R^{k-j} r^{j-2} <$$

$$< \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} |a_k| r^{k-j} * r^{j-2} < \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} |a_k| r^{j-2} < \infty \Rightarrow \textit{Beh}$$

$$\#??? \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j+1} (z-z_0)^{k-j} h^{j} = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \sum_{j=2}^{k} \binom{k}{j} (z-z_0)^{k-1-(j-1)} h^{j-1} =$$

*//**S3.2.7** (1756)Großer Umordnungssatz//*

// Sei J eine abzählbar unendliche Menge und seien J_k, $k\in\mathbb{N}$,//

// eine Zerlegung von J. Sei ferner $j \underset{Abbildung}{\rightarrow} a_j$ eine Abb von J in//

// $\mathbb{K}$, so, daß $\sum_{j\in J} a_j$ absolut konvergent ($\sum_{j\in J} |a_j|<\infty$).//

// Dann konvergieren auch alle $\sum_{j\in J_k} a_j$, $j\in J_k$ absolut und es gilt//

// (**) $\sum_{j\in J} a_j = \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{j\in J_k} a_j)$//

stetige Funktion von h...0 für $h\to 0$... $\lim_{h\to 0} \to 0$)

Daraus folgt die Beh.

(2710)**Korollar** (gilt auch im Komplexen)
(.)Vor: Konvergenzradius ist $\propto$)

Jedes Polynom $P(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(z-z_0)^\nu$: R→R ist auf R differenzierbar mit

$P'(z)=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \nu(z-z_0)^{\nu-1} \underbrace{=}_{\nu-1=\mu} \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{\mu+1}(\mu+1)(z-z_0)^\mu$ ein neues Polynom vom grad(P)-1. Insbesondere gilt $P(z)\equiv a_0$: $P'(z)\equiv 0$

(..)siehe auch S5.1.5.
(Konvergenzradien $\propto$)

Die Funktion e^x: R→(0,∞) ist differenzierbar auf R und $(e^x)'=e^x$ nach Differenzierbarkeit der Potenzreihe
sin x: R→[-1,1]... (sin x)'=cos x
cos x: R→[-1,1]...(cos x)'=-sin x
sinh x: R→R diffb auf R mit (sinh x)'=cosh x
cosh x: R→[1, ∞] diffb auf R mit (cosh x)'=sinh x

Bew:Differenzierbarkeit von PR
Durch gliedweises Ableiten der entsprechenden Potenzreihen zeigt man:

S5.1.5(2711) Die Expotentialfunktion, die trigonometrischen und die hyperbolischen Funktionen sind auf C differenzierbar und es gilt $(e^z)'=e^z$, (sinz)'=cos z, (cos z)'=-sinz,
(sinh z)'=cosh z, (cosh z)'=sinh z jeweils ∀ z∈C.

*//**S3.2.8** (1758)Expotentialreihe//*

// Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ ist für alle z∈C absolut konvergent.//

// ∀ z∈R gilt weiter $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!=\exp(z)=\lim_{n\to¥}(1+z/n)^n$.//

*//**S3.6.3**(2104) 2.)sin $z=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$, cos $z=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$, KR=∞.//*

*//**D1.7.1** (905)$n\in N_0$, $\alpha\in C$ 1.)$n!:=\prod_{k=1}^{n} k=\begin{cases}1 \text{ für } n=0\\ 1*2*,\dots*n, n\in N\end{cases}$, 0!=1//*

Bew:$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} \Rightarrow (e^z)'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kz^{k-1}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}=e^z$.

(sin x)'=cos x siehe P51_1