4.3(2400) Stetige Funktionen

Im Folgenden betrachten wir Funktionen auf einem meist fest gewählten Definitionsbereich $D\subset\mathbb{K}$, sowie einen weiteren Punkt $x_0\in D$. Der für uns wichtigste Fall ist der, wenn D ein Intervall in $\mathbb{R}$ und x_0 ein Punkt im Inneren des Intervalls oder einer der Randpunkte ist, aber meist spielt die genaue Art von D und x_0 keine Rolle.

$D\to\mathbb{K}$, z_0 Häufungspunkt von D, $D\subset\mathbb{K}$,

$$\lim_{z\to z_0} f(z_0)=y_0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon:\ |f(z)-\underbrace{y_0}_{f(z_0)}|<\varepsilon\ \forall\ z\in U_{\delta_\varepsilon}(z_0)\cap D \Leftrightarrow$$

$$\forall\ (z_n),\ (z_n)\in D\setminus\{z_0\},\ z_n\to z_0 \text{ gilt: } f(z_n)\to y_0$$

Wir betrachten hauptsächlich reellwertige Funktionen aus einem Intervall

//***D4.1.1****(2200) Für $x\in\mathbb{R}$ und $\delta>0$ sei//*

// $U_\delta(x_0):=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\delta$-Umgebung von x_0 in $\mathbb{R}$.

// $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0):=U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,0<|x-x_0|<\delta\}$.

//3.) $x_0\in\mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt(HP) von M:$\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)\neq\emptyset$.//

//4.) M' sei die Menge aller HP von M//

D4.3.1(2400)

Sei $D\subset\mathbb{R}$. Dann heißt $f: D\to\mathbb{R}$, stetig im Punkt $x_0\in D$:$\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0: f(x)\in U^{\varepsilon}(f(x_0))\ \forall\ x\in D\cap U_\delta(x_0)$ oder äquivalent....

***($\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \forall\ x\in D$ mit $|x-x_0|<\delta$).

f heißt stetig auf $A\subset D$:$\Leftrightarrow$ f ist in jedem $x_0\in A$ stetig.

Bem: Ist $x_0\in D\cap D'$, so ist f stetig in $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

#Vergleich mit Def Funktionsgrenzwerte

#**4.2 Funktionsgrenzwerte**

#**D4.2.1**(2300) Sei $M\subset\mathbb{R}$, $x_0\in M'$, d.h. x_0 ist HP, und $f:M\to\mathbb{R}$ gegeben

#1.) f(x) konvergiert gegen $a\in\mathbb{R}$ für $x\to x_0$:$\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$ mit $f(x)\in U_\varepsilon(a)\ \forall\ x\in M\cap\overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$.

($\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$: $|f(x)-a|<\varepsilon\ \forall\ x\in M$ mit $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$).

Schreibweise: $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ oder $f(x)\to a\ (x\to x_0)$.

Für $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ heißt $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ linksseitig stetig in einem Punkt $x_0\in(a,b]$, wenn $\lim_{x\to x_{0-}} f(x)=f(x_0)$

Analog wird die rechtsseitige Stetigkeit definiert. Offenbar ist f stetig an einer Stelle $x_0\in(a,b)$, wenn es dort sowohl rechts-, als auch linksseitig stetig ist.

Wir nennen f auch stückweise stetig, wenn f bis auf endlich viele Ausnahmestellen $x_j\in[a,b]$ stetig ist und wenn an diesen Stellen x_j noch die einseitigen Grenzwerte existieren, d.h., wenn alle Unstetigkeitsstellen Sprungstellen sind. Es ist nicht schwer, zu zeigen,

dass eine auf [a,b] stückweise stetige Funktion dort beschränkt ist.

Bsp:(2401)(.) $f(x)=1/x$ auf $(0,\infty)$, $x_0>0$, $\varepsilon>0$.

$|f(x)-f(x_0)|=\frac{1}{x * x_0}|x-x_0|<\varepsilon$, $\delta_\varepsilon:=\min\{\frac{|x_0|}{2},\frac{x_0^2}{2}\}\underbrace{=}_{\varepsilon<1}\frac{\varepsilon x_0^2}{2}$???

#● $x<x_0 \Rightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{x_0} \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|=|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}|=\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x}<\varepsilon+\frac{1}{x_0} \Rightarrow$

$x>\frac{1}{\varepsilon+\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{\frac{\varepsilon x_0+1}{x_0}}=\frac{x_0}{\varepsilon x_0+1} \Rightarrow$

$|x-x_0|\underbrace{=}_{x<x_0}x_0-x<x_0-\frac{x_0}{\varepsilon x_0+1}=\frac{\varepsilon x_0^2+x_0-x_0}{\varepsilon x_0+1}=\frac{\varepsilon x_0^2}{\varepsilon x_0+1}=\overline{\delta_\varepsilon}$: $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ für $x<x_0$

#● ● $x>x_0 \Rightarrow \frac{1}{x_0}>\frac{1}{x} \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|=|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}|=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}<\varepsilon \Rightarrow -\frac{1}{x}<\varepsilon-\frac{1}{x_0} \Rightarrow$

$\frac{1}{x}>-\varepsilon+\frac{1}{x_0} \Rightarrow x<\frac{1}{-\varepsilon+\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{\frac{-\varepsilon x_0+1}{x_0}}=\frac{x_0}{-\varepsilon x_0+1} \Rightarrow$

$|x-x_0|\underbrace{=}_{x>x_0}x-x_0<\frac{x_0}{-\varepsilon x_0+1}-x_0=\frac{x_0+\varepsilon x_0^2-x_0}{-\varepsilon x_0+1}=\frac{\varepsilon x_0^2}{-\varepsilon x_0+1}=\underline{\delta_\varepsilon}$: $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ für $x>x_0$

$\delta_\varepsilon=\min\{\frac{\overbrace{\varepsilon x_0^2}^{>0}}{\underbrace{\underbrace{\varepsilon}_{>0} x_0}_{>0}+1},\frac{\varepsilon x_0^2}{-\varepsilon x_0+1}\}=\frac{\varepsilon x_0^2}{-\varepsilon x_0+1} \Rightarrow \exists\ \delta_\varepsilon=\frac{\varepsilon x_0^2}{\varepsilon x_0+1}>|x-x_0|:|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow$

$f(x)$ ist stetig im Punkt x_0

(..) $g(x)=x^2$ auf $[-1,1]$, $|g(x)-g(x_0)|=|x^2-x_0^2|\le|x-x_0||x+x_0|\le 2|x-x_0| \Rightarrow$
Zu $\varepsilon>0$ kann man $\delta_\varepsilon:=\varepsilon/2\ \forall\ x_0\in[-1,1]$ angeben.

#(...) $h(x)=\sqrt{x}$, $x\in(0,\infty)$, $x_0>0$, $\varepsilon>0$.

$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon \Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{x_0}||\sqrt{x}+\sqrt{x_0}|<\varepsilon|\sqrt{x}+\sqrt{x_0}| \Rightarrow |x-x_0|<\varepsilon|\sqrt{x}+\sqrt{x_0}| \Rightarrow$

gewählt $\delta_\varepsilon<\varepsilon|\sqrt{x_0}|<\varepsilon|\sqrt{x}+\sqrt{x_0}| \Rightarrow \exists\ \delta_\varepsilon$: $|x-x_0|<\delta_\varepsilon<\varepsilon|\sqrt{x_0}|<\varepsilon|\sqrt{x}+\sqrt{x_0}| \Rightarrow$

$\sqrt{x}$ stetig in $x_0\ \forall\ x_0>0$.

D4.3.1'(2401) komplexe Mengen
Sei $M\subset\mathbb{C}$. Dann heißt $f: M\to\mathbb{C}$ stetig im Punkt $z_0\in M$: $\Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0: f(z)\in U^{\varepsilon}(f(z_0))\ \forall\ z\in M\cap U_\delta(z_0)$.
f heißt stetig auf $A\subset M$: $\Leftrightarrow$ f ist in jedem $z_0\in A$ stetig.

*//**D4.3.1**(2400)//*
*//***($\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \forall\ x\in D$ mit $|x-x_0|<\delta$).//*

Bem:a) Isolierter Pkt von D: $\exists\ \rho>0$: $|z-z_i|\ge\rho\ \forall\ z\in D\backslash\{z_i\}$.
Ist $z_0\in M$ isolierter Punkt von M, so ist f in z_0 stetig, weil (***)gilt, sofern $\delta\le\rho$.

Andere Formulierung:
$\forall\ z_i\in D$ gilt (***) sofern $\delta\le\rho$, d.h. jede auf D definiert Funktion ist stetig in allen isolierten Punkten

b) Ist $z_0\in M\cap M'$, so ist f stetig in $z_0 \Leftrightarrow \exists\ \lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.
Ist f in z_0 nicht stetig, so heißt f in z_0 eine Unstetigkeitsstelle von f.

c) Sei $f:D\to \mathbb{K}$ stetig in $x_0\in D$. Beachte, dass (***) trivialerweise richtig bleibt, wenn wir δ verkleinern; insofern ist δ durch ε nie eindeutig festgelegt. Es genügt aber zum Nachweis der Stetigkeit für jedes $\varepsilon>0$ ein (möglicherweise sehr kleines) $\delta>0$ zu finden, für welches (***) gilt. Wir nennen manchmal ein solches δ auch ein zu ε gehörendes δ.

Andere Formulierung:
Sei eine Funktion $f:D\to \mathbb{K}$ gegeben. Wir sagen, dass f in einem Punkt $x_0\in D$ stetig ist, wenn folgendes gilt:
(***) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall\ x\in D: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$
Falls f in jedem Punkt von D stetig ist, sagen wir kurz:
f ist auf D stetig.

Andere Formulierung:
Eine Funktion $f:D\to \mathbb{C}$, heißt stetig in
(.) einem Punkt $z_0\in D$, wenn $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0}$ existiert), d.h.

„$z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0$“ $\Rightarrow$ $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f(z_0)$ oder $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(\lim\limits_{z\to z_0} z)$
\#   Herleitung dieser Def aus (***) siehe S4.3.3

Eine Funktion $f:I\to \mathbb{R}$, heißt stetig in
(..)einem Teilintervall $J\subset I$, falls f in jedem Punkt $x_0\in J$ stetig ist
Bem:(.)Es gilt f ist stetig in $x_0\in I$

$\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0: |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \forall\ x\in U_{\delta_\varepsilon}(x_0)\cap I$

$\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ f(U_{\delta_\varepsilon}(x_0)\cap I)\subset U_\varepsilon(f(x_0))$

(..)Für Funktion $f: U_\delta(z^*)\to \mathbb{C}$ ($z^*\in\mathbb{C}$, $\delta>0$) können wir völlig analog Stetigkeit von f in $z_0\in: U_\delta(z^*)$ definieren

Wir sagen, dass f auf D einer Lipschitzbedingung genügt,falls eine Konstante $L\in\mathbb{R}_+$ existiert, sodass $|f(x_0)-f(x_1)|\le L|x_0-x_1|\ \forall\ x_0,x_1\in D$.
Jedes solches L heißt auch Lipschitzkonstante für f (auf D).
Solche f werden auch als dehnungsbeschränkt bezeichnet.
f ist kontrahierend (zusammenziehend) $\Rightarrow$ $L<1$

Bsp: $\sqrt{x}$ (im Nullpkt senkrecht) erfüllt Lipschitzbedingung nicht
Konstante Funktionen und die identische Abbildung sind immer stetig, denn sie erfüllen die Definition für beliebiges δ bzw für $\delta=\varepsilon$.
Weiter folgt aus der Gültigkeit einer Lipschitzbedingung immer die Stetigkeit auf D, denn dann gilt (***) für $\delta=\varepsilon/L$:

$|x_0-x_1|<\frac{\varepsilon}{L}=\delta \Rightarrow L|x_0-x_1|<\varepsilon \Rightarrow |f(x_0)-f(x_1)|\le L|x_0-x_1|<\varepsilon$

Bez:a) Es seien eine Funktion $f:I\to \mathbb{R}$ und eine Menge $M\subset I$ Gegeben. Dann bezeichnen wir mit

(.) $\sup\limits_{x\in M} f(x) := \begin{cases} \sup(f(M)), \textit{falls } f(M) \textit{ nach oben beschränkt ist} \\ \infty, \textit{falls } f(M) \textit{ nicht nach oben beschränkt ist} \end{cases}$

(..) $\inf\limits_{x\in M} f(x) := \begin{cases} \inf(f(M)), \textit{falls } f(M) \textit{ nach unten beschränkt ist} \\ -\infty, \textit{falls } f(M) \textit{ nicht nach unten beschränkt ist} \end{cases}$

das Supremum bzw das Infimum von f auf M.

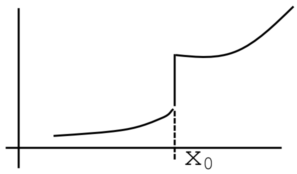
Falls existent: $\max\limits_{x\in M} f(x) := \max f(M)$ das Maximum,

$\min\limits_{x\in M} f(x) := \min f(M)$ das Minimum von f auf M

Bem: Ist $f:I\to \mathbb{R}$ nicht stetig in $x_0\in I$, so bezeichnet man x_0 auch als Unstetigkeitsstelle von f, z.B.

(.) Sprungstellen

$\lim\limits_{x\to x_0^-} \neq \lim\limits_{x\to x_0^+}$



(..) Oszillationsstellen

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert nicht

(...) $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$

ist in keinem Punkt $x_0\in[0,1]$ stetig

b) Wir sagen $f:I\to\mathbb{R}$ ist stetig, wenn f stetig auf I ist.

A4.3.1

a) Zeige, f: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ auf $[a,b]$, $0<a<b$ dehnungsbeschränkt.

Lös: ● Seien $x,x'\in[a,b]$, $|f(x)-f(x')| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}| = |\frac{x'-x}{x*x'}| = |\frac{1}{x*x'}|\,|x'-x|$

$$\underbrace{\leq}_{xx'\geq a} \underbrace{\frac{1}{a^2}}_{L} |x'-x| \Rightarrow$$

f dehnungsbeschränkt auf $[a,b]$ mit $L=\frac{1}{a^2}$

●● f ist kontrahierend (zusammenziehend) $\Leftrightarrow$ $L=\frac{1}{a^2}<1$ $\Leftrightarrow$ $a>1$

b) Zeige $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$ nicht dehnungsbeschränkt.

Lös: Sei $x':=0$ $\Rightarrow$ $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = |\sqrt{x}|$

Annahme $\exists$ $L\geq 0$ mit $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq L|x-0| = L*x$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x} \leq Lx$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\sqrt{x}}{x} \leq L$ $\Leftrightarrow$

$L\geq \frac{1}{\sqrt{\underbrace{x}_{\in[0,1],x=0}}} = \infty$, da $\frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x\to 0$ beliebig groß wird.

Anschaulich.. Bewegt sich x ein kleines Stück auf 0 zu, dann bewegt sich f(x) ein imVerhältnis zu x ein unbeschränkt großes Stück

c) Zeige die Stetigkeit der Abb $z\mapsto|z|$ auf $\mathbb{C}$.

Hinweis: $|f(z)-f(z_0)| \leq |z-z_0|$, $||z|-|z_0|| \leq |z-z_0|$.

Lipschitzbed L=1

*//**D4.2.4**(2303)Funktionenfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf X gegen f:*
// $\forall \varepsilon>0\ \exists\ n_0$: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \ \forall\ x\in X$//

S4.3.1(2404) Geg sei ein beliebige Menge $D\subset K$ sowie Funktionen f_n, g_k: $D\to K\ \ \forall\ n,k\in N$. Dann gilt

a) Sind alle f_n in einem Punkt $x_0\in D$ stetig und ist die Funktionenfolge (f_n) auf D gleichmäßig konvergent, so ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig in x_0.

Bew: Mit der Dreiecksungleichung folgt für $x\in D$:

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)|$$
$$\leq|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|$$

Gegeben $\varepsilon>0 \underset{gleichmäßigeKonvergenz}{\vdots} \exists\ N\in R_+$: $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon/3\ \ \forall\ n\geq N$

$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon/3\ \ \forall\ n\geq N$

(unabhängig von der Wahl von $x\in D$)

n fest, $\exists\ \delta>0\ \ |f_n(x)-f_n(x_0)| \underset{f_n\ stetig}{\leq} \varepsilon/3\ \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow$

$|f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon$ für $|x-x_0|<\delta$. Das ist aber die Stetigkeit von f im Punkt x_0.

Andere Formulierung:

Vor: (.) Sei $M\subset C^{\text{v}}$ f_n: $M\to C$, $n\in N$, auf M gleichmäßig konvergent gegen $f: M\to C$.
(..) $\forall\ n\in N$ sei $f_n(z)$ stetig in $z_0\in M$ (bzw auf M).

Beh: f(z) ist in z_0 (bzw. auf M) stetig

*//**D4.2.4**(2303)Funktionenfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf X gegen f:*
// $\forall \varepsilon>0\ \exists\ n_0$: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \ \forall\ x\in X\ \ \forall\ n>n_0$//
*//**D4.3.1**(2400)//*
//Sei $D\subset R$. Dann heißt $f: D\to R$, stetig im Punkt $x_0\in D$: $\Leftrightarrow$ //
//$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$: $f(x)\in U_\varepsilon(f(x_0))\ \ \forall\ x\in D\cap U_\delta(x_0)$ oder äquivalent....//
*//***($\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \ \forall\ x\in D$ mit $|x-x_0|<\delta$).//*
// f heißt stetig auf $A\subset D$: $\Leftrightarrow$ f ist in jedem $x_0\in A$ stetig.//
//Bem: Ist $x_0\in D\cap D'$, so ist f stetig in $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.//

Bew: $\lim_{n\to\infty}(\lim_{z\to z_0} f_n(z))=\lim_{z\to z_0}(\lim_{n\to\infty} f_n(z))$, $z_0\in M$,

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)$: $|f_n(z))-f(z)|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)$ und

$\forall\ z\in M, n_1>n_0\ \ \forall\ z\in M\cap U_\delta(z_0)$ ist

$$|f(z)-f(z_0)|\leq|f(z)-f_{n_1}(z)|+|f_{n_1}(z)-f_{n_1}(z_0)|+|f_{n_1}(z_0)-f(z_0)|$$

$$<\varepsilon+\underbrace{\left|f_{n_1}(z)-f_{n_1}(z_0)\right|}_{\underset{(..)}{\leq}\varepsilon\ \forall(z-z_0)<\delta(\varepsilon),z\in M}+\varepsilon<3\varepsilon$$ #(egal ob 3ε oder ε)#

Bsp:1.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sin nx$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx$,

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin nx$, $0<r<1$, $x\in\mathbb{R}$, $|\cos nx|\le 1$, $|\sin nx|\le 1$,

$a_n=\frac{1}{n^2}$ oder r^n ...alle Reihen sind gleichmäßig konvergent#???# und stetig auf $\mathbb{R}$.

2.) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, KR $R>0$, $|z-z_0|\le r<R$

$|a_n(z-z_0)^n|\le|a_n|r^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n<\infty \underbrace{\Rightarrow}_{S4.5.1}$

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sind gleichmäßig konvergent auf $\overline{U_r(z_0)}$ $\Rightarrow$ f stetig auf $U_R(z_0)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}z^n$,KR $R=1$, $|\frac{1}{n^2}z^n|\le\frac{1}{n^2}$ $\forall\ |z|\le 1$ gleichmäßig konvergent auf $\overline{U_R(O)}$, stetig???

//**D4.2.5**(2304)Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert gleichm auf X gegen s://

// $\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)=s(x)$ $\forall\ x\in X$ ($s_n:=f_1+f_2+\dots f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} s$)//

b) Sind alle g_k in einem Punkt $x_0\in D$ stetig und ist die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ auf D gleichmäßig konvergent, so ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig in x_0.

Bew:Folgt aus a) für $f_n=\sum_{k=1}^{\infty} g_k$

A4.3.2 Untersuche, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimme ggf den Wert:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\,(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})$

*//**S4.2.2**(2304)*

//Vor:Sei $M\subset\mathbb{R}$, $x_0\in M'$, $f:M\to\mathbb{R}$, $g:M\to\mathbb{R}$

//Beh:1.)(Folgenkriterium) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \forall$ Folgen $(x_n)\subset M\setminus\{x_0\}$

// mit $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$.

Lös: $x>1$, $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$

$$\sqrt{x}\,(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}) = \sqrt{x}\,\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1} \to$$

$$\frac{3}{\sqrt{1+0}+1} = 3/2\,(x\to\infty)$$

(wegen Stetigkeit der Wurzelfkt nach Bsp (...) Seite 2401 und $\lim\limits_{x\to\infty} 3/x=0$)

Ausführliche Begründung:

1.Möglichkeit mit Folgekriterium analog zu S4.2.2 gilt auch für $x\to\infty$.

Sei $x_n>0\ \forall n \wedge x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty \wedge (x_n)_{n=1}^{\infty}$ beliebige Folge $\Rightarrow$

$$\sqrt{x_n}\,(\sqrt{x_n+3}-\sqrt{x_n}) = \frac{3}{\sqrt{1+3/x_n}+1} \underbrace{\overbrace{\to}^{\text{GW Regeln Folgen}}}_{\text{Stet }\sqrt{\ }\text{Fkt}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{1+0}+1} \underbrace{=}_{n\to\infty} 3/2 \underbrace{\Rightarrow}_{(x_n)\text{ bel}} \exists \lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\,(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})=3/2$$

*//**S4.2.3**(2307) Grenzwertregeln//*

// 4.)Seien $M,H\subset\mathbb{R}$, $f:M\to H$, $h:H\to\mathbb{R}$, $x_0\in M'$.

// (•)Sei $y_0:=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, dann gilt $y_0\in\overline{H}$.

// (••)Falls $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=c$ existiert, so $\exists \lim\limits_{x\to x_0} h(f(x))=c$

2.Möglichkeit mit Analogon zu S4.2.3 4.) für $x\to\infty$:

Sei $f(x)=1+3/x$ (d.h. $M=(1,\infty)$, $M'=[1,\infty)$, da),

$x>0$ und $h(y)=\sqrt{y}$ (d.h. $M'=[0,\infty)$), sowie $y_0=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=1=c$

(da $\sqrt{\ }$ Fkt stetig). $y_0\in M\cap M'$ und $c=h(y_0)$ $\Rightarrow$

$$\exists \lim_{x\to\infty}\underbrace{h(f(x))}_{\sqrt{1+3/x}}=c=1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{GW Regeln}} \frac{3}{\sqrt{x+3/x}+1} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 3/2$$

//**D4.1.1**(2200) Für $x\in\mathbb{R}$ und $\delta>0$ sei//

// $U_\delta(x_0):=\{x\in\mathbb{R} \mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta, x_0+\delta)=\delta$-Umgebung von x_0 in $\mathbb{R}$.

// $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0):=U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}=\{x\in\mathbb{R} \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$.

//Sei $M\subset\mathbb{R}$, $M\neq\emptyset$.//

//3.) $x_0\in\mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt(HP) von $M:\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ ist $M\cap\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)\neq\emptyset$.//

//4.) M' sei die Menge aller HP von M und //

//**S4.2.3**(2307) Grenzwertregeln//

// 4.) Seien $M,H\subset\mathbb{R}$, $f:M\to H$, $h:H\to\mathbb{R}$, $x_0\in M'$.

// (●) Sei $y_0:=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, dann gilt $y_0\in\overline{H}$.

// (● ●) Falls $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=c$ existiert, so $\exists$ $\lim\limits_{x\to x_0} h(f(x))=c$

\# Sei $y=f(x)=1+3/\overbrace{\underbrace{x}_{\to\infty}}^{>0}$ $(M=(\overbrace{\underbrace{1}_{x\to\infty}}^{z.B.},\infty)$, $M'=[1,\infty)$ (da $M\cap\overset{\circ}{U}_\varepsilon(1)\neq\emptyset$) und

\# $h(y)=\sqrt{y}$ sowie $y_0=\lim\limits_{x_0\to\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=1=c$ (da $\sqrt{\ }$ Fkt stetig).

\# $y_0\in M\cap M'$ und $1=c=h(y_0)$ $\Rightarrow$ $\exists$ $\lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{h(f(x))}_{\sqrt{1+3/x}}=c=1$ $\underset{\text{GW Regeln}}{\Rightarrow}$ $\dfrac{3}{\sqrt{x+3/x}+1}$ $\underset{n\to\infty}{\to}$ 3/2

b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{12}{8-x^3}\right)$

Lös: $\underbrace{8}_{2^3}-x^3=(2-x)(x^2+2x+4)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{12}{8-x^2}=\dfrac{1}{2-x}\left(1-\dfrac{12}{x^2+2x+4}\right)=$

$\dfrac{1}{2-x}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4}=\dfrac{-4-x}{x^2+2x+4}\to\dfrac{-4-2}{2^2+2\cdot2+4}$ (wegen GWRegeln

oder Stetigkeit der rat Fkt Nenner$\neq0$ für $x=2$) $\underset{x\to 2}{=}$ -1/2

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^r-1}{x-1}$ für $r\in\mathbb{Q}$ (fest)

//**S1.7.2**(903) Endliche geometrische Reihe//

// Vor. Seien $a,b\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$ Beh: 1.) $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k=\begin{cases} n+1, & a=1\\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a\neq 1\end{cases}$//

Lös:Beh: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^r-1}{x-1}=r$ für $r\in\mathbb{Q}$.

Bem: Diese Aussage gilt sogar für
$r\in\mathbb{R}$, sogar für $r\in\mathbb{C}$. (Dies wird am einfachsten mit der Ableitung von $f(x)=x^x$ im Punkt 1 gezeigt, siehe später)

Sei $r=p/q$ mit $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$.

(.) Sei zuerst $q=1$, d.h. $r=p\in\mathbb{Z}$,

Falls $r\geq 0$, so wurde Beh schon in A4.2.2 a) bewiesen

oder $\dfrac{x^r-1}{x-1}=\sum\limits_{\nu=0}^{r-1} x^\nu \underbrace{\rightarrow}_{x\to 1} \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} 1^\nu=r$

Falls $r<0$:

Sei (x_n) eine beliebige Folge aus $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ mit $x_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 1$.

O.B.d.A. $x_n\neq 0$ $\forall$ n. Sei $y_n:=1/x_n$ #$\Rightarrow x_n=y_n^{-1}$#, $n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $y_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 1$ $\Rightarrow$

$$\frac{x_n^r-1}{x_n-1}=\frac{y_n^{-r}-1}{y_n^{-1}-1}=\frac{(y_n^{-r}-1)y_n}{1-y_n}=\frac{1-y_n^{-r}}{1-y_n}(-y_n)=\Big(\sum_{k=0}^{\overbrace{-r-1}^{\geq 0}} \underbrace{y_n^k}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}\Big)\underbrace{(-y_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}-1}=(-r)(-1)\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} r$$

(..) Allg Fall: Sei (x_n) eine beliebige Folge aus $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ mit

$x_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 1$. Def $y_n:=x_n^{\frac{1}{q}}$ $\Rightarrow$ $x_n:=y_n^q$, $n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $y_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 1$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x_n^r-1}{x_n-1}=\dfrac{y_n^{\overbrace{pq}^{=p}}-1}{y_n^q-1}=$

$$\frac{\left(\dfrac{y_n^p-1}{y_n-1}\right)}{\left(\dfrac{y_n^q-1}{y_n-1}\right)} \overbrace{\underbrace{\rightarrow}_{(n\to\infty)}}^{wg(.)} p/q=r \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Folgenkrit}} \text{Beh, denn } \sqrt[q]{\ } \text{ ist stetig.}$$

d) $\lim_{x\to 0} x[1/x]$

//**S1.5.15**(759)//
//1.) $\forall\ a\in\mathbb{R}\ \exists$ das größte Ganze von a, d.h. $\exists\ [a]\in\mathbb{Z}$ mit //
// $[a]\le a<[a]+1$, $[a]:=\max\{n\in\mathbb{Z}\ |n\le a\}$//
Lös: $[1/x]\le 1/x<[1/x]+1 \Rightarrow [1/x]-1\le (1/x)-1<[1/x] \Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{1}{x}-1}_{=\frac{1-x}{x}}<[1/x]\le 1/x\quad \forall\ x\ne 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-x<x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\le 1\ \forall\ x>0 \\ 1-x>x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\ge 1\ \forall\ x<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underbrace{1-|x|}_{\to 1(x\to 0)}<x\cdot[1/x]<\underbrace{1+|x|}_{\to 1(x\to 0)}\quad \forall\ x\ne 0 \Rightarrow$$

(Sandwichth, GW mit Folgenkrit) $\exists\ \lim_{x\to 1} x[1/x]=1$.

oder

... $\lim_{x\to 0} x(1/x-r)=\lim_{x\to 0}(1-xr)=1$ $(1/x=[1/x]+r, r\in[0,1))$

e) $\lim_{x\to 0}\ \sin(1/x)$

Lös: $\lim_{x\to 0}\ \sin(1/x)$ existiert nicht, denn:

$x_n=\frac{1}{\pi n}$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\rightleftarrows} 0$ und $\sin(1/x_n) \underset{n\to\infty}{\rightleftarrows} 0$

$y_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow y_n \underset{n\to\infty}{\rightleftarrows} 0$ und $\sin(1/y_n)=1\to 1$

S4.3.2(2409) Expotential-, Trigonometrische, hyperbolische Funktionen sind stetig auf ganz $\mathbb{C}$.
(Bew erst mit S4.3.4 klar,…Nummerierung wird nicht geändert)

S4.3.3(2410)Folgenstetigkeit

$f=D\to K$ stetig in $z_0\in D \Leftrightarrow$ für jede Folge

(z_n) in D mit $z_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0$ gilt auch $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(z_0)$.

//b)(2)Indirekter Beweis//

// Man leitet aus der Negation von B die Negation von A her://

// $\neg B \Rightarrow \neg A$ ist logisch äquivalent mit $A \Rightarrow B$.//

//# Bem:$(A \Rightarrow B \wedge \neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$//

//**D4.3.1'**(2401)

// $f:D\to C$. f ist in einem Punkt $z_0\in D$ stetig://

//(***) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall\ x\in D$: $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$//

Bew:"⇒"Seien f stetig in z_0 und sei (z_n) eine Folge in D mit $z_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0$,

$\varepsilon>0$ beliebig und $\delta>0$ wie in D4.3.1(***) ⇒

$\exists\ \delta>0$ mit $z\in D$ und $|z-z_0|<\delta$ mit $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon \Rightarrow$

$\exists$ N mit $n\geq N$: $|z_n-z_0| \underbrace{\overbrace{<}^{n\geq N}}_{z_n\to z_0} \delta \underbrace{\Rightarrow}_{D4.3.1'} |f(z_n)-f(z_0)|<\varepsilon\ \forall\ n\geq N \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=f(z_0)$

„⇐"Annahme: Sei f nicht stetig in $z_0 \Rightarrow$

$\exists\ \varepsilon>0\ \forall\ \delta>0\ \exists\ z\in D$: $|z-z_0|<\delta$, $|f(z)-f(z_0)|\geq\varepsilon$,

$\delta=1/n$ gewählt (n genügend groß),

$z=z_n$: $|z_n-z_0|<1/n$, $|f(z_n)-f(z_0)|\geq\varepsilon \Rightarrow f(z_n) \underset{n\to\infty}{\not\to} f(z_0)$

S4.3.4(2410) Rechenregeln für Stetigkeit

Beh:1.) Vor:$M\subset R$, f,g mit $M\to R$, stetig im Punkt $x_0\in M$.

Aussage: $f(x_0)>a$ ($<a$ bzw. $\neq a$) ⇒

$\exists\ \delta>0$ mit $f(x)>a$ ($<a$ bzw. $\neq a$) $\forall\ x\in M\cap U_\delta(x_0)$.

*//**D4.3.1**(2400)//*

//Sei $D\subset R$. Dann heißt $f: D\to R$, stetig im Punkt $x_0\in D$:⇔ //

//($\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \forall\ x\in D$ mit $|x-x_0|<\delta$).//

*//**S1.2.1**(406) Vor: K sei angeordneter Körper und $a,b\in K$//*

// Beh: 6.)$|a+b|\leq|a|+|b|$ (Dreiecksungleichung)//

Bew:Fall $f(x_0)>a \Rightarrow f(x_0)-a=c>0$. Sei $0<\underline{\varepsilon}<c=f(x_0)-a \underbrace{\Rightarrow}_{S4.3.1}$

$\forall\ \underline{\varepsilon}>0\ \exists\ \delta_{\underline{\varepsilon}}>0$ mit $|f(x_0)-f(x_{\underline{\varepsilon}})|<\underline{\varepsilon}\ \ \forall\ x_{\underline{\varepsilon}}\in D$ mit $|x_0-x_{\underline{\varepsilon}}|<\delta_{\underline{\varepsilon}} \Rightarrow$

- $f(x_{\underline{\varepsilon}})>f(x_0) \Rightarrow f(x_{\underline{\varepsilon}})>f(x_0)>a \Rightarrow f(x_{\underline{\varepsilon}})>a$

- • $f(x_{\underline{\varepsilon}})<f(x_0) \Rightarrow |f(x_0)-f(x_{\underline{\varepsilon}})|=f(x_0)-f(x_{\underline{\varepsilon}})<\underline{\varepsilon}<f(x_0)-a \Rightarrow -f(x_{\underline{\varepsilon}})<-a \Rightarrow$

  $f(x_{\underline{\varepsilon}})>a$

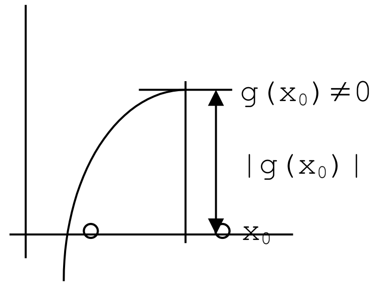
2.) Vor: $M\subset K$, f,g mit $M\to K$, stetig im Punkt $x_0\in M$.
$\alpha f+\beta g$ stetig in x_0 $\forall$ $\alpha,\beta\in R$ (bzw $\in K$),
fg stetig in x_0,
f/g stetig in x_0, falls $g(x_0)\neq 0$ (und folglich $g(x)\neq 0$ in $U_\delta(x_0)\cap M$).

//**S4.2.2**(2310)(Folgenkriterium) //
//Vor: $D\to K$ und ein HP $z_0\in D$ gegeben. //
//Beh: $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 \Leftrightarrow f(z_n)\overset{n\to\infty}{\to} w_0$ $\forall$ (z_n) mit $z_n\in D\setminus\{z_0\}$ $\forall$ n $\vee$ $z_n\overset{n\to\infty}{\to} z_0$//
//**S4.2.3**(2307) Grenzwertregeln//
//Vor: Geg. $f,g:D\to K$ und HP z_0//
//1.) Beh: Existieren $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ $\vee$ $\lim_{z\to z_0} g(z)=w_1$, so existieren folgende//
// Limites und es gilt: (..) $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z)=w_0w_1$//
//**S4.1.1**(2204)//
//4.) $z_0\in C$ ist HP von $M\subset C \Leftrightarrow \exists$ eine Folge $(z_n)\subset M\setminus\{z_0\}$ mit $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0$.//
//**S4.3.3**(2409)Folgenstetigkeit//
// Genau dann ist $f:D\to K$ stetig in $x_0\in D$, wenn für jede Folge //
// (z_n) in D mit $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0$ auch $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f(z_0)$ gilt.//
#Bew: fg: Vor S4.2.2, S4.2.3 $z_0\in M$ und z_0 ist HP erfüllt?
Sei (z_n) Folge in M mit $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0 \underset{S4.1.1}{\Rightarrow} z_0\in C$ ist HP in $M\subset C$
Zu beweisen $\forall$ (z_n) in D mit $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0$ gilt $f(z_n)g(z_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f(z_0)g(z_0)$
(da dann $\underset{S4.3.2}{\Rightarrow}$ $fg:D\to K$ stetig in $z_0\in D$)
$z_0,z_n\in M$, f,g stetig $\Rightarrow \forall$ (z_n), $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0$: $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f(z_0) \wedge g(z_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} g(z_0)$
$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ & $\lim_{z\to z_0} g(z)=g(z_0) \underset{S4.2.3}{\Rightarrow} \lim_{z\to z_0} f(z)g(z)=f(z_0)g(z_0) \underset{S4.2.2}{\Rightarrow}$
$f(z_n)g(z_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f(z_0)g(z_0) \underset{S4.3.2}{\Rightarrow}$ fg stetig in z_0
Bew f/g $\Rightarrow$ f*1/g und Bew 1/g stetig:
Ist $g:D\to K$ stetig in $x_0\in D$ und ist $g(z_0)\neq 0$, so gibt es ein r>0 derart, dass $g(z)\neq 0$ ist auf $D_1=D\cap\{x:|z-z_0|<r\}$ und $1/g$: $D_1\to K$ ist wieder stetig in z_0.
Bew:Es genügt, die 1. Teilaussage $g(z)\neq 0$ in $U_{\delta_\varepsilon}(z_0)$ zu zeigen:
Sei $\varepsilon=|g(z_0)|$. Wegen der Stetigkeit $\exists$ $\delta_\varepsilon>0$ und für dieses δ_ε folgt mit der Dreiecksungleichung nach unten
$|g(z)|=|g(z)+g(z_0)-g(z_0)|=|g(z_0)-g(z)-g(z_0)|\geq$
$|g(z_0)|-|g(z)-g(z_0)|=\varepsilon-|\underbrace{g(z)-g(z_0)}_{<\varepsilon\Rightarrow\exists\delta_\varepsilon.|z-z_0|<\delta_\varepsilon}|>0$ falls nur
$z\in D$ und $|z-z_0|<\delta$ ist. Daher gilt die Beh. mit $r=\delta$.

//***($\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \forall\ x\in D$ mit $|x-x_0|<\delta$).//
//**S1.2.1**(406) Vor: K sei angeordneter Körper und $a,b\in K$//
// 8.) $||a|-|b||\le|a\pm b|\le|a|+|b|$//
// Linke Ungleichung heißt Dreiecksungleichung nach unten.//
//***D4.1.1***(2200) *Für $x\in R$ und $\delta>0$ sei* //
// $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0):=U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}=\{x\in R / 0<|x-x_0|<\delta\}$. //

//3.) $x_0\in R$ heißt Häufungspunkt(HP) von M: $\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)\neq\emptyset$.//
//**S4.3.3**(2409) Folgenstetigkeit//
// Genau dann ist $f:D\to K$ stetig in $x_0\in D$, wenn für jede Folge //
// (z_n) in D mit $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z_0$ auch $f(z_n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} f(z_0)$ gilt.//

\#
\# Beispielskizze
\# ohne ○ $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon=|g(x_0)|$



\# $g(x)\neq0 \wedge g(x)$ stetig in $x_0\in D \overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{\varepsilon=|g(x_0)|}}^{D4.3.1}$

\# Für $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon=|g(x_0)|\ \exists\ \delta_{\varepsilon=|x_0|}$ mit $|x-x_0|<\delta_{\varepsilon=|x_0|} \underbrace{\Rightarrow}_{S1.2.18.)}$

\# $|g(x)|=|g(x)+g(x_0)-g(x_0)|=|g(x_0)-g(x)-g(x_0)|\ge$
$|g(x_0)|-|g(x)-g(x_0)|=$

\# $\underbrace{\varepsilon}_{=|x_0|}-|\underbrace{g(x)-g(x_0)}_{\underset{!!!}{\le}\varepsilon=|x_0|\Rightarrow\exists\delta_{\varepsilon=|x_0|}:|x-x_0|<\delta_{\varepsilon=|x_0|}}|\ge0$ falls nur $x\in D \wedge |x-x_0|<\delta_{\varepsilon=|x_0|}$ ist $\underbrace{\Rightarrow}_{D'=\{x||x-x_0|\}<\delta_{\varepsilon=|x_0|}}$

\# $|g(x_n)|\neq0 \wedge |x_n-x_0|<\delta_{\varepsilon=|x_0|}\ \forall\ x_n\in D'$ & $g(x):D'\to R$ stetig in $x_0\in D' \underbrace{\Rightarrow}_{S4.3.2}$

\# $\forall$ Folgen $(x_n), x_n\in D'$: $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x_0$ gilt $g(x_n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} g(x_0) \wedge |x_n-x_0|<\delta_{\varepsilon=|x_0|}$

\# $\underbrace{\Rightarrow}_{g(x_n),g(x_0)\neq0}\ \forall$ Folgen (x_n), $x_n\in D'$ mit $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x_0$ gilt

\# $\frac{1}{g(x_n)} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{1}{g(x_0)} \wedge |x_n-x_0|<\delta_{\varepsilon=|x_0|} \underbrace{\Rightarrow}_{S4.3.2}$ Beh

3.) Vor: $f:D\to D_1$ stetig in $x_0\in D$ und $g:D_1\to K$ stetig in $x_0\in D$ bzw $f(x_0)\in D_1$.
Hintereinanderausführung $g\circ f:D\to K$ stetig in x_0.

Andere Formulierung:
$f: M\to R$ stetig in $x_0\in M \vee h: f(M)\to R$ stetig in $f(x_0) \Rightarrow$
$(h\circ f)(x)=h(f(x))$ stetig in x_0
Bew: Aus Rechenregeln für Folgen und S4.3.2

4.) $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(z-z_0)^\nu$, $R>0$ ist stetig $\forall\ z: z\in U_R(z_0)$

5.) Vor: $\underbrace{M}_{\subset C}$ kompakt, $f_n: M\to R$ stetig auf M $\forall\ n\in N$,
$f_n(z)\nearrow f(z)\ (n\to\infty)\ \forall\ z$, $f: M\to R$ stetig auf M.
Aussage: $f_n(z)\to f(z)$

Bsp: 1.) $f(z)=1\ \forall\ z\in C$ ist stetig auf C,
da $|f(z)-f(z_0)|=0<\varepsilon\ \forall\ |z-z_0|<\delta$ ($\delta>0$, δ beliebig).
2.) $f(z)=z\ \forall\ z\in C$ ist stetig auf C,
da $|f(z)-f(z_0)|=|z-z_0|<\varepsilon\ \forall\ |z-z_0|<\delta=\varepsilon$ (d.h $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$)

3.) Jedes Polynom $f(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ oder $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (z-z_1)^\nu$ ist auf $\mathbb{C}$ stetig (S4.3.3).

A4.3.3

a) Gesucht: Bijektive,stetige Funktion $f:(0,1)\to(0,y)\ \forall\ y>0$

Lös: $f(x)=x*y$

b) Die durch $f(x)=x^3-x^2+3x-1$ auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f ist stetig. Bestimme zu $\varepsilon>0$ explizit ein $\delta>0$, sodass $\forall\ x\in U_\delta(1)$ gilt: $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$.

Lös: Sei $\varepsilon>0$, definiere $\delta(\varepsilon)=\min\{1,\varepsilon/7\}$. Dann gilt $\forall\ x\in\mathbb{R}$ mit $|x-1|<\delta$ (d.h. insbesondere $x\in(0,2)$)

$|f(x)-f(1)|=|x^3-x^2+3x-3|=|x-1|(x^2+3)<\delta(x^2+3)<7*\delta<\varepsilon$

\# Es genügt kleine Umgebungen um 1 ($\delta(\varepsilon)\le 1$) zu untersuchen, d.h.

\# $|x-1|<\delta\le 1 \Rightarrow x-1<1 \vee 1-x<1 \Rightarrow x<2 \vee x>0 \Rightarrow x\in(0,2)$

\# $|f(x)-f(1)|=|x^3-x^2+3x-1-(1-1+3-1)|=|x^3-x^2+3x-3|=|(x-1)(x^2+3)|=$

\# $|(x-1)||(x^2+3)|=|x-1|(\underbrace{x^2+3}_{>0})<\delta(x^2+3)<7*\delta<\varepsilon$

A4.3.4 Untersuche die folgenden Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ auf Stetigkeit

a) $f(x)=\begin{cases} x+2 \text{ für } x\le 0 \\ x^2-2x+a \text{ für } x>0 \end{cases}$ mit $a\in\mathbb{R}$ fest.

Lös: Auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist f stetig. Außerdem gilt

$\lim_{x\to 0_+} f(x)=\lim_{x\to 0_+}(x^2-2x+a)=a$ und $\lim_{x\to 0_-} f(x)=\lim_{x\to 0_-}(x+2)=2=f(0)$.

Somit gilt $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0) \Leftrightarrow a=2$. Dann ist f stetig in $x_0=0$ für $a=2$

d.h. f stetig $\Leftrightarrow$ a=2

b) $f(x)=\begin{cases} x \text{ für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$

Lös: Fall 1: $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Dann gilt für $x_n=x+\frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow{n\to\infty} x$, aber $f(x_n)=0 \overset{n\to\infty}{\not\to} x=f(x) \Rightarrow$

f nicht stetig in x

Fall 2: $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. $\exists\ (x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x \Rightarrow$

$f(x_n)=x_n \overset{n\to\infty}{\not\to} x\neq f(x)=0 \Rightarrow$ f nicht stetig in x

Fall 3: $x=0$. Sei $\varepsilon>0$ baf. Setze $\delta_\varepsilon=\varepsilon \Rightarrow \forall\ x\in\mathbb{R}$ mit $|x-x_0|=|x-0|=|x|<\delta_\varepsilon$:

$|f(x)-f(0)|=|f(x)|<\delta_\varepsilon=\varepsilon$

f stetig nur im Nullpunkt, f nicht stetig.

A4.3.5 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei stetig in 0 und es gelte $f(x+y)=f(x)*f(y)\ \ \forall\ x,y\in\mathbb{R}$.

a) Zeige, dass entweder $f(x)=0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$ oder $f(x)>0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$ gilt.

Im 2. Fall gilt stets $f(0)=1$.

Bew: $\left.\begin{array}{l} Fall\,1: f(x)=0\ \forall x\in R \\ Fall\,2: \exists x_0\in R\, mit\, f(x_0)\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$f(x_0)=f((x_0-x)+x)=f(x_0-x)f(x)\ \ \forall\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

Fall 1: richtig für $f(x)=0$, d.h. auch für $f(x_0)=0$

Fall 2: $f(x)\neq 0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Es gilt $f(0)=f(0+0)=(f(0))^2 \Rightarrow 1=f(0)$

Noch z.z. Im Fall 2 gilt $f(x)>0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

Es gilt $f(x)=f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=(f(\frac{x}{2}))^2>0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

b) Beweise, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

//**S4.3.3**(2409) Folgenstetigkeit//
// Genau dann ist $f:D\to\mathbb{K}$ stetig in $x_0\in D$, wenn für jede Folge//
// (x_n) in D mit $x_n\to x_0$ auch $f(x_n)\to f(x_0)$ gilt für $n\to\infty$.//

Bew: Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x)=0$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n-x)=f(0)$ stetig nach Vor $\Rightarrow$

$f(x_n)=f(x_n-x+x)=f(x_n-x)f(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0)f(x)=f(x) \underbrace{\Rightarrow}_{S4.3.2}$ f ist stetig in $x\in\mathbb{R}$

$\underbrace{\Rightarrow}_{x\text{ beliebig}}$ f ist stetig

c) Beweise, dass im Fall $f(0)=1\ \forall\ x\in\mathbb{Q}$ gilt: $f(x)=f((1))^x$.

Bew: #$f(0)=1$ heißt nach a) 2. Fall $f(x)>0$

$f(x)>0\ \forall\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=f(1)^x\ \forall\ x\in\mathbb{Q}$

(.) $f(nx)=(f(x))^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

Bew durch Induktion nach n bei festem $x\in\mathbb{R}$

n=0: $f(0*x)=f(0)=1=(f(x))^0$

$n\to n+1$: Für ein $n\in\mathbb{N}$ gelte $f(nx)=f(x)^n \Rightarrow$

$f((n+1)x)=f(nx+x)=f(nx)f(x)=f(x)^n f(x)=(f(x))^{n+1}$

(..) $f(nx)=(f(x))^n\ \forall\ n\in\mathbb{Z}\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

Bew: Es genügt zu zeigen $f(-nx)=f(x)^{-n}\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

Es gilt $1=f(0)=f(nx+(-nx))=f(nx)f(-nx) \underbrace{=}_{(.)} (f(x))^n f(-nx) \Rightarrow$

$1=(f(x))^n f(-nx) \Rightarrow f(-nx)=(f(x))^{-n}$

Beh

(...) Für $x\in\mathbb{Q}$ gilt $f(x)=f(1)^x$

Bew: Es sei $x=p/q$ mit $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$(f(1))^p \underbrace{=}_{(..)} f(p)=f(\frac{p}{q}q)=f(xq) \underbrace{=}_{(.)} (f(x))^q \Rightarrow f(x)=(f(1))^{\frac{p}{q}}=(f(1))^x$.

d) Beweise, dass im Fall $f(0)=1\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ gilt: $f(x)=f(1)^x$.

Bew: Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x \Rightarrow$

$f(x) \underbrace{=}_{b)\ f\text{ stetig}} \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \underbrace{=}_{c)} \lim\limits_{n\to\infty}(f(1))^{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n\log f(1)}=e^{x\log f(1)}=f(1)^x$.

A4.3.6 Gegeben sei eine stetige und monoton wachsende Funktion $f:[0,1]\to[0,1]$. Es sei $a_0\in[0,1]$. Definiere eine Folge, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ rekursiv durch $a_{n+1}=f(a_n)$ für $n\in\mathbb{N}_0$. Beweise, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent ist und dass der Grenzwert a ein Fixpunkt von f ist, d.h. es gilt $f(a)=a$.

Lös: #Bsp: $y=x^2$ $\nearrow$,

\# $x=0,2\Rightarrow x^2=0,04$, $x=0,3\Rightarrow x^2=0,09$, aber

\# $a_0=0,1$, $a_1=0,1^2=0,01$, $a_1<a_0$

\# $y=\sqrt{x}$ $\nearrow$, $a_0=0,25$, $a_1=\sqrt{0,25}=0,5$, $a_1>a_0$

Fall 1: $a_1\geq a_0 \Rightarrow a_{n+1}\geq a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$ Bew durch Induktion

$n=0$: o.k.

$n\to n+1$: Für ein $n\in\mathbb{N}_0$ gilt $a_{n+1}\geq a_n \underbrace{\Rightarrow}_{\text{f mon wachsend}} f(a_{n+1})\geq f(a_n)$

d.h. $a_{n+2}\geq a_{n+1}$.

Fall 2: $a_1<a_0 \Rightarrow a_{n+1}<a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$ analog

$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ist also monoton und außerdem beschränkt

$(a_n\in[0,1]\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0) \Rightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent, etwa

$a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \underbrace{=}_{f\ stetig} f(a)$

A4.3.7 Zeige: Jedes Polynom ist stetig in $\mathbb{C}$.
Hinweis: x^n stetig weil x stetig

A4.3.8 Zeige: Jede rationale Funktion ist auf ihrem natürlichen Definitionsbereich stetig.

A4.3.9 Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)(z-z_0)^n$

habe Konvergenzradius R>0 bzw. R=∞.

Definiere $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n)(z-z_0)^n$ für $z \in U_R(z_0)$, falls $R \neq \infty$, bzw. $z \in \mathbb{C}$, falls R=∞.

Zeige, $\forall\ z_1 \in U_R(z_0)$ (falls $R \neq \infty$) bzw. $z_1 \in \mathbb{C}$, falls R=∞: $\exists \lim_{z \to z_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}$ und gebe diesen Wert mit Hilfe der a_n, $n \in \mathbb{N}_0$ an.

*//**S3.5.7**(2053)*

//Vor:Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ habe KR R>0. Sei z_0^* mit $|z_0 - z_0^*| = r < R$//

// fest gewählt.//

//Beh: $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z_0 - z_0^*| < R-r$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0^*)^n$,//

// wobei $\forall\ k \in \mathbb{N}_0$, $b_k := \sum_{\nu=k}^{\infty} \binom{\nu}{k} a_\nu (z_0^* - z_0)^{\nu-k}$ absolut konvergiert//

Lös: (noch nicht überprüft)

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \underset{S3.5.7}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_n)^k$ mit $b_k := \sum_{\nu=k}^{\infty} \binom{\nu}{k} a_\nu (z_1 - z_0)^{n-k}$ $\forall\ k \in \mathbb{N}_0$,

insbesondere $b_0 = f(z_1) \Rightarrow \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z-z_1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} (z-z_1)^k \underset{k \to \infty}{\to}$

$b_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu (z_1 - z_0)^{\nu-k}$ für $(z_0 \underset{k \to \infty}{\to} z_1)$.

$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu+1} (z-z_n)^k$ ist stetig im Inneren des Kreises ⇒

$g(z) \underset{\nu \to \infty}{\to} g(z_1) = b_1$

A4.3.10 Zeige:Ist $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in einem Punkt $c \in [a,b]$, so gilt immer $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ falls $c \in (a,b)$ und

$\lim_{x \to a_+} f(x) = f(a)$ falls c=a bzw $\lim_{x \to b_-} f(x) = f(a)$ falls c=b ist.

A4.3.11 Berechne den Grenzwert einer rationalen Funktion für $x \to \infty$

A4.3.12 Formuliere und beweise Rechenregeln für die oben eingeführten Funktionsgrenzwerte (+. mal,Quot...Nenner ≠0)

A4.3.13 Gib ein Bsp einer auf [0,1] stückweise stetigen Funktion an, welche an mindestens einer Stelle weder links- noch rechtsseitig stetig ist.

A4.3.14 Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeige: Alle evt Unstetigkeitsstellen von f sind Sprungstellen. Die Menge aller Unstetigkeitsstellen ist höchstens abzählbar.
Falls es unendlich viele Sprungstellen $x_k \in [a,b]$ mit Sprunghöhen f_k gibt, dann ist die Reihe $\sum f_k$ konvergent und ihr Wert ist höchstens gleich b-a.

A4.3.15 Zeige an Hand eines Bsp. $a_k = (-1)^k$: Es gibt Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, welche nicht konvergieren, für die aber $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $\forall$ $x \in (-1,1)$ konvergiert und $a = \lim_{x \to 1_-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ existiert. Man nennt die Zahl a auch den Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ im Sinne des Abelschen Summationsverfahrens.

dazu: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = 1/(1+x) \underset{x \to 1_-}{\longrightarrow} \to 1/2$