3.4 (1900) **Abelsche partielle Summation**

S3.4.1 (1900) (Abelsche partielle Summation)

Vor: $(w_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$, $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $A_n := \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu$, $n \in \mathbb{N}_0$

Beh: $\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu z_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1}) + A_n z_{n+1}$

Bew: # $A_\nu - A_{\nu-1} = w_\nu$ #, $A_{-1} := 0$

$$\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu z_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} (A_\nu - A_{\nu-1}) z_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu z_\nu - \sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu-1} z_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu z_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu-1} z_\nu - A_{-1} z_\nu =$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu z_\nu - \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu z_{\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1}) + A_n z_{n+1}$$

Bem: $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1})$ konvergent & $\exists \lim_{n\to\infty} A_n z_{n+1} \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu$ ist kvgt

S3.4.2 (1900) Dirichlet-Kriterium (DirK). Siehe auch S3.4.4

Bez: $(a_n) \searrow 0$ bedeutet monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Vor: $a_n \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n=0}^{\infty} \searrow 0$ (d.h. $a_n \geq 0$) $\wedge$

$\exists\ k>0$: $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $|B_n| \leq k$, $b_n \in \mathbb{C}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ $\forall\ n$

Beh: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ ist konvergent.

*//**S3.4.1** (1900) Vor: $(w_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$, $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $A_n := \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu$, $n \in \mathbb{N}_0$ //*

//Beh: $\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu z_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1}) + A_n z_{n+1}$ //

*//**S2.2.2** (1301) Vor: $(a_n) \subset R$ monoton und beschränkt Beh: $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$ //*

*//**S3.2.2** (1700) Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}$, $n \in \mathbb{N}_0$. 1.) $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konv $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konv.*

Bew: $B_k := \sum_{\nu=0}^{k} b_\nu$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \underbrace{=}_{S3.4.1} \sum_{k=0}^{n} B_k (a_k - a_{k+1}) + \underbrace{\underbrace{B_n}_{|B_n| \leq k} \underbrace{a_{n+1}}_{\to 0}}_{\to 0} = \sum_{k=0}^{n} B_k (a_k - a_{k+1})$

$\sum_{k=0}^{n} |B_k (a_k - a_{k+1})| \nearrow$, da $||>0$

Z.z. $S_n = \sum_{k=0}^{n} |B_k (a_k - a_{k+1})|$ beschränkt und $\nearrow \underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2} \sum_{k=0}^{\infty} |B_k (a_k - a_{k+1})|$ konvergent

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2} \sum_{k=0}^{\infty} B_k (a_k - a_{k+1})$ konvergent:

$\sum_{k=0}^{n} |B_k (a_k - a_{k+1})| \leq \sum_{k=0}^{n} |B_k| |(a_k - a_{k+1})| \leq k \sum_{k=0}^{n} |(a_k - a_{k+1})| = k(a_0 - \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0}) \leq k a_0 \Rightarrow$

$\sum_{k=0}^{n} |B_k (a_k - a_{k+1})|$ beschränkt $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} B_k (a_k - a_{k+1})$ konvergent $\Rightarrow$

$\sum_{k=0}^{n} B_k (a_k - a_{k+1}) + \underbrace{\underbrace{B_n}_{\leq k} \underbrace{a_{n+1}}_{\to 0}}_{\to 0} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ konvergent.

Bsp:1.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\rho}$ konvergent $\Leftrightarrow \rho>0$

2.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{(k+1)^\rho}$, $a\in\mathbb{R}$, $\rho>0$

Beh:1.) $\forall\ \rho>0$, $a\in U_1(0)\setminus\{1\}$ konvergent

2.) $a=1$ konvergent $\Leftrightarrow \rho>1$

3.) Für $|a|>1$ Divergenz für $\rho>0$

Bew: $a_k=\frac{1}{(k+1)^\rho} \searrow 0$ $(\forall\rho>0)$,

$b_k=a^k$, $|B_k|=|\sum_{\nu=0}^{k} a^\nu|=|\frac{1-a^{k+1}}{1-a}|\le\frac{2}{|1-a|}<\infty\ \forall\ a\in U_1(0)\setminus\{1\}$

$|\frac{a^k}{(k+1)^\rho}|=\exp(k*\log|a|)/(k+1)^\rho \underset{k\to\infty}{\underbrace{\rightarrow}} \infty\ \forall\ |a|>1$??????

S3.4.3(1901) (Konvergenzkriterium von Du Bois-Reymond)

Vor: $(w_\nu),(z_\nu)\subset\mathbb{C}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty}|z_\nu-z_{\nu+1}|<\infty$ und $\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu$ kvgt ($A_n=\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu \underset{n\to\infty}{\underbrace{=}} A$)

Beh: (.) $\exists \lim_{n\to\infty} z_n$, (..) $\sum_{\nu=0}^{\infty}|A_\nu(z_\nu-z_{\nu+1})|<\infty$ und (...) $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu$ ist kvgt

*//**S3.2.2** (1700) Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}$, 1.) $\sum_{n=0}^{\infty}|z_n|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent//*

//**S3.4.1**(1900) Vor: $(a_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$, $(b_\nu)_{\nu=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $A_n:=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$, $n\in\mathbb{N}_0$ //

//Beh: $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu=\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(b_\nu-b_{\nu+1})+A_n b_{n+1}$//

//Bem: $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(b_\nu-b_{\nu+1})$ konvergent und $\exists \lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu$ ist kvgt//

*//**S2.2.2** (1301) Vor: $(a_n)\subset\mathbb{R}$ monoton und beschränkt Beh: $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//*

Bew: (.) $\sum_{\nu=0}^{\infty}|z_\nu-z_{\nu+1}|<\infty \underset{S3.2.2\ 1.)}{\underbrace{\Rightarrow}} \exists \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n}(z_\nu-z_{\nu+1})=\lim_{n\to\infty}(z_0-z_{n+1})=z_0-z\in\mathbb{C} \Rightarrow$

\# $\exists\ Z=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n}(z_\nu-z_{\nu+1})=\lim_{n\to\infty}(z_0-z_{n+1})=z_0-\lim_{n\to\infty} z_{n+1}=z_0-\lim_{n\to\infty} z_n=z_0-z\in\mathbb{C} \Rightarrow$

\# $z=\lim_{n\to\infty} z_n=z_0-Z$ #

(..) $|A_n|=|\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu| \underset{Vor}{\underbrace{\le}} k\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow |A_n(z_n-z_{n+1})|\le k|z_n-z_{n+1}| \Rightarrow$

$\sum_{\nu=0}^{\infty}|A_\nu(z_\nu-z_{\nu+1})| \underset{Vor}{\underbrace{\le}} k\sum_{\nu=0}^{\infty}|z_\nu-z_{\nu+1}|<\infty \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty}|A_\nu(z_\nu-z_{\nu+1})| \nearrow \wedge$ beschränkt

$\underset{S2.2.2}{\underbrace{\Rightarrow}} \sum_{\nu=0}^{\infty}|A_\nu(z_\nu-z_{\nu+1})|$ konv $\underset{S3.2.2}{\underbrace{\Rightarrow}} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(z_\nu-z_{\nu+1})$ konv

(...) $A_n z_{n+1} \underset{n\to\infty}{\underbrace{\rightarrow}} Az\in\mathbb{C}$, $\underset{S3.4.1}{\underbrace{\Rightarrow}} \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(z_\nu-z_{\nu+1})+Az \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu$ ist kvgt

Bem: Spezialfall

Sei $(w_\nu)_{\nu=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $(z_\nu)_{\nu=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, $(z_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ monoton & beschränkt,

$\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ konvergent $\Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu$ konvergent

Bsp: Sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ kvgt $\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\sqrt{\nu+1}}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\log(\nu+1)}$,

$\sum_{\nu=1}^{\infty} (1+1/\nu)^{\nu} a_\nu$ sind kvgt

S3.4.4 (1902) Konvergenzkriterium nach Dedekind

Vor: $(w_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$, $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu - z_{\nu+1}| < \infty$, $z_n \underbrace{\rightrightarrows}_{n\to\infty} 0$ und sei $\left(\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu\right)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt.

Beh: $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1})$ konvergiert, wobei $\sum_{\nu=0}^{\infty} |A_\nu(z_\nu - z_{\nu+1})| < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Bew: $A_n := \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu$, $|A_n| \le k$, $\forall\ n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow A_n z_{n+1} \underbrace{\rightrightarrows}_{n\to\infty} 0$

$|A_\nu(z_\nu - z_{\nu+1})| \le k |z_\nu - z_{\nu+1}|$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} |A_\nu(z_\nu - z_{\nu+1})| \le k \sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu - z_{\nu+1}| < \infty \underbrace{\Rightarrow}_{S3.4.1}$

$\exists \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(z_\nu - z_{\nu+1})$ ...abs kvgt

Bem: <u>**S3.4.2** (1900) Dirichlet-Kriterium (DirK):</u>

Vor: $a_n \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n=0}^{\infty} \searrow 0$ (d.h. $a_n \ge 0$) &

$\exists\ k > 0$: $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$, $|W_n| \le k$, $w_n \in \mathbb{C}$, $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ $\forall$ n

Beh: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k$ ist konvergent,

$\sum_{k=0}^{\infty} |A_k(a_k - a_{k+1})| < \infty$ & $\sum_{k=0}^{\infty} w_k a_k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(a_k - a_{k+1})|$.

<u>Ist Sonderfall von **S3.4.4**</u>

Bew: $a_\nu \searrow 0 \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu - a_{\nu+1}| = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu - a_{\nu+1}) = a_0 - \underbrace{a_{n+1}}_{\to 0 (n\to\infty)}$

\# $\underbrace{a_n}_{Drichlet} = \underbrace{z_n}_{Dedekind} \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ Sonderfall von $z_\nu \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu - a_{\nu+1}| = \sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu - z_{\nu+1}| < \infty$,

\# ^

\# $(\underbrace{a_n}_{Drichlet})_{n=0}^{\infty} \searrow 0$ Sonderfall von $(\underbrace{z_n}_{Dedekind})_{n=0}^{\infty} \underbrace{\rightrightarrows}_{n\to\infty} 0$

Zusammenfassung

Vor:

Für alle: $a_n \in R$, $w_\nu, z_\nu \in C$, $k \in R$, $k>0$, $A_n=\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu$ $n\in N_0$

S3.4.1 (Abel)	**S3.4.2** (DirK)	**3.4.3** (DBR)	**S3.4.4** (Dedekind)
$(w_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$, $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \subset C$	$(a_n)_{n=0}^{\infty} \searrow 0$ ($a_n \geq 0$) $\lvert\sum_{k=0}^{n} z_k\rvert \leq k$	$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lvert z_\nu - z_{\nu+1}\rvert<\infty$ $A_n \underbrace{=}_{n\to\infty} A$ (konv) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lvert z_\nu - z_{\nu+1}\rvert<\infty$	$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lvert z_\nu - z_{\nu+1}\rvert<\infty$ $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$. $\lvert \left(\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu\right)_{n=0}^{\infty} \rvert \leq k$

Aussagen:

$\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu z_\nu = \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu (z_\nu + z_{\nu+1})}_{*konv} +$ $\underbrace{A_n z_{n+1}}_{*\exists \lim_{n\to\infty} A_n z_{n+1}} \underbrace{\Longrightarrow}_{Falls\ *}$ $*: \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu z_\nu$ konv	$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k$ konv	$\exists \lim_{n\to\infty} z_n$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lvert A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1})\rvert<\infty$ $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu$ konv	$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lvert A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1})\rvert<\infty$ $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1}) =$ $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu$ konvergent

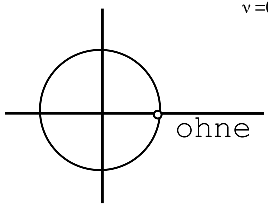
Bsp:Betrachtung von Reihen der Form $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \underbrace{z^\nu}_{b_\nu}$

*//**S3.1.1**(1601)* $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ $\forall\ |z|<1,\ z\neq 1//$

Falls $(a_\nu)\in R$, $a_\nu \searrow 0$, oder $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu - a_{\nu+1}|<\infty$, $a_\nu \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ und

S3.1.1: $\sum_{\nu=0}^{n} z^\nu = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ $\forall\ |z|\leq 1,\ z\neq 1,\ n\in N_0 \Rightarrow |\sum_{\nu=0}^{n} z^\nu| \leq \frac{1}{|1-z|}$ ist

$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ kvgt $|z|\leq 1$, $z\neq 1$



ohne 1/0

Speziell:1.) $b_n=\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}, \; 0<\alpha\le 1$ $\quad \overset{\Longrightarrow}{\overbrace{S3.4.2}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)^\alpha} \text{ kvgt für } |z|\le 1,\ z\neq 1$$

$$(\alpha>1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha}<\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^n|}{(n+1)^\alpha}<\infty \quad \forall\ |z|\le 1)$$

2.) $a_n=\dfrac{1}{(\log n)^\alpha}$,

$$0<\alpha\le 1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(\log n)^\alpha} \text{ kvgt für } |z|\le 1, z\neq 1,$$

$$\alpha>1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}<\infty \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z^n|}{(\log n)^\alpha}<\infty \quad \forall |z|\le 1)$$

A3.4.1 Zeige: Ist $a_n \searrow 0\,(n\to\infty)$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ und es

gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} (b_{2\nu}-b_{2\nu+1})$.

*//**S3.4.2**(1900) Dirichlet-Kriterium (DirK)//*

//Mit einer reellen Folge: $a_n,b_n\in R$, $(a_n)_{n=0}^{\infty} \searrow 0$ (d.h. $a_n\ge 0$) und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$

mit// //$B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k \Rightarrow \exists\ k>0: |B_n|\le k\ \forall\ n$ gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ ist konvergent.//

*//**S3.4.1**(1900) (Abelsche partielle Summation) //*

//Vor: $(w_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$, $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $A_n:=\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu$, $n\in\mathbb{N}_0$ //

//Beh: $\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu z_\nu=\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(z_\nu-z_{\nu+1})+A_n z_{n+1}$//

Bew:1.Möglichkeit mit **S3.4.2** DirK:

Sei $a_n=(-1)^n$, $A_n:=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu=\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \Rightarrow A_n=\begin{cases}1 \text{ für n gerade}\\ 0 \text{ sonst}\end{cases} \Rightarrow$

$(A_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt $\underbrace{\overset{b_n \text{ mon fallend}}{\overbrace{\Rightarrow}}}_{S3.4.2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{a_\nu}_{(-1)^\nu} b_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu b_\nu$ konvergiert und

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \underbrace{A_\mu}_{=\begin{cases}1 \text{ für } \mu=2\nu\\ 0 \text{ sonst}\end{cases}} (b_\mu-b_{\mu+1}) \underbrace{=}_{S3.4.1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (b_{2\nu}-b_{2\nu+1}).$$

Also ist Leibnizkriterium ein Spezialfall vom Dirichletkriterium

2.Möglichkeit mit Leibnizkriterium:

//**S3.1.2** (1602) Vor: (z_ν) und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent.//

//Beh: 6.) Ist $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $n_0:=0$, $n_k<n_{k+1}$, $k\in N_0$ eine Teilfolge von $(n)_{n=0}^{\infty}$ und

//setzt man $c_\nu:=\sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} z_k$, $\nu\in N_0$, (zwischen n_ν und $n_{\nu+1}$ gibt es einige n_k) so

//konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ und es gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu=\sum_{k=0}^{\infty} z_k$

//(d.h. in konvergenten Reihen darf man beliebig Klammern setzen).//

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ konvergiert nach Leibnizkriterium und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n b_n}_{=:a_n} \underset{S3.1.2\,6.)}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=2k}^{2(k+1)-1} a_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=2k}^{2k+1} a_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{2k}+a_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} (b_{2k}-b_{2k+1})$$

A3.4.2 Untersuche auf Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (1+1/n)^n$

*//**S2.3.8**(1402) Vor: $x\in R \wedge x\neq 0 \wedge n>-x \wedge x_n=(1+x/n)^n \;\forall n\in N$ //*

// Beh: $(x_n) \uparrow$ //

*//**S2.3.10**(1403)$[(1+1/n)^n, (1+1/n)^{n+1}]$ ist für eine Intervallschachtelung mit*

// $\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^{n+1} =: e$, $n\in N$ d.h. $2{,}37<e<3{,}16$//

*//**S3.4.3**(1901)Vor: $(w_\nu), (z_\nu) \subset C$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu - z_{\nu+1}| < \infty$ und $\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu$ kvgt $(\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} A)$//*

//Beh:(.)$\exists \lim_{n\to\infty} z_n$, (..) $\sum_{\nu=0}^{\infty} |A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1})| < \infty$ und (…) $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu$ ist kvgt //

Lös: 1. Möglichkeit

Sei $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n=(1+1/n)^n$ $n\in N \underset{2.3.10}{\Rightarrow}$ (b_n) monoton und beschränkt $\wedge$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nach Leibnizk. $\underset{S3.4.3\,Bem}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert.

2. Möglichkeit

*//**S3.1.4**(1605) Leibniz Kriterium//*

//Vor: $(a_n) \subset R, a_n \searrow 0 (n\to\infty)$. Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent//

$a_n b_n$ monoton fallend..LeibnizKrit.

Sei $a_n = 1/n(1+1/n)^n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^{n+1} n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}(n+1)^n} = \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} <$

$\left(\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = 1 \;\forall n\in N \Rightarrow a_{n+1}<a_n \;\forall n\in N \Rightarrow a_n \searrow$ (sogar $a_n \downarrow$)

$\lim_{n\to\infty} a_n = (\lim_{n\to\infty} 1/n)(\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n) = 0\cdot e = 0 \underset{S3.4.1}{\Rightarrow}$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (1+1/n)^n$ konvergiert

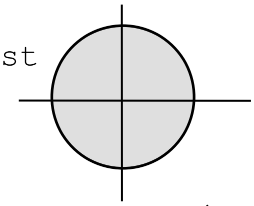
//**S3.4.2**(1900) Dirichlet-Kriterium (DirK)//

//Mit einer reellen Folge: $a_n, b_n \in R$, $(a_n)_{n=0}^{\infty} \searrow 0$ (d.h. $a_n \geq 0$) und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$

mit// //$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \Rightarrow \exists\, k>0: |B_n| \leq k \;\forall n$ gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ ist konvergent.//

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e-(1+1/n)^{n})z^{n}$ für $|z|\le 1,\ z\neq 1$.

Lös: Sei $a_n=z^n$, $b_n=e-(1+1/n)^n, n\in\mathbf{N}, |z|\le 1, z\neq 1, z\in\mathbf{C}$ fest



$$|A_n| = |\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu| \underbrace{=}_{z\neq 1} |\frac{1-z^{n+1}}{1-z}| \le \frac{1+|z^{n+1}|}{|1-z|} \underbrace{\le}_{|z|\le 1}$$

$\frac{2}{|1-z|}$ $\forall\ n\in\mathbf{N}_0$, $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt, $(1+1/n)^n \nearrow e\,(n\to\infty) \Rightarrow b_n \searrow 0\,(n\to\infty)$.

$$\underbrace{b_{n\text{ mon fallend}\to 0}}_{\underbrace{\Rightarrow}_{S3.4.2}} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{b_n}_{(e-(1+1/n)^n)} \cdot \underbrace{a_n}_{z^n} \text{ konvergiert und } = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(b_\nu - b_{\nu+1}) =$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1-z^{\nu+1}}{1-z}\left[(1+\frac{1}{\nu+1})^{\nu+1} - (1+\frac{1}{\nu})^{\nu}\right]$$

Bem: Für $|z|<1$ ist die Aussage trivial, da (b_n) beschränkt ($\Rightarrow$ KR=1).
Interessant ist hier das Verhalten der Reihe für $|z|=1$