3.2 (1700) Reihen mit nicht-negativen Gliedern, Absolut konvergente Reihen

Zunächst Reihen mit nicht-negativen Gliedern

S3.2.1 (1700)

Seien $a_k \geq 0\ \forall\ k \geq p$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ entweder konvergent oder bestimmt divergent, und der erste Fall tritt genau dann ein, wenn die Partialsummenfolge beschränkt ist.

//S2.2.2 (1301) Vor: $(a_n) \subset R$ monoton und beschränkt Beh: $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//

Bew: Folgt mit S2.2.2, da die Partialsummenfolge monoton wachsend ist.

Andere Formulierung:

Vor: $(x_k)_{k\in N_0} \subset \mathbb{R}$, $x_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Beh: $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergent $\Leftrightarrow$ $(S_n)_{n\in N_0}$ beschränkt

//S2.2.2 (1301) Vor: $(a_n) \subset R$ monoton und beschränkt Beh: $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//

Bew: $(S_n)_{n\in N_0} \nearrow \underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$ Beh

D3.2.1 (1700) $(z_n) \subset \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ heißt absolut konvergent:$\Leftrightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ ist konvergent. Wegen S3.2.1 Schreibweise $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$

S3.2.2 (1700)

Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}, (w_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0{}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Beh:

1.) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent

$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent.

//S1.2.1 (406) Vor: K angeordnet, $a,b \in K$ Beh: 6.) $|a+b| \leq |a|+|b|$//

//S3.1.2 (1602) Vor: Seien $(z_\nu),(w_\nu) \subset \mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent.

//Bem:1.) Cauchy-Konvergenzkriterium S2.4.2 für unendliche Reihen//

// Sei $(z_n) \subset \mathbb{C}$. $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit//

// $|\sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu| < \varepsilon\ \forall\ n > m \geq n_1(\varepsilon)$. (d.h. $|S_n - S_m)| < \varepsilon\ \forall\ n > m \geq n_1(\varepsilon)$.//

Bew: $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent $\underbrace{\Leftrightarrow}_{S3.1.2}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0(\varepsilon)$: $\sum_{\nu=m+1}^{n} |z_\nu| < \varepsilon\ \forall\ n > m \geq n_0(\varepsilon)$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S1.2.1\ 6.)} |\sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu| \leq \sum_{\nu=m+1}^{n} |z_\nu| < \varepsilon\ \forall\ n > m \geq n_0(\varepsilon) \underbrace{\Rightarrow}_{S3.1.2\ Bem1.)} \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent.

Bem: a) Konvergenz $\not\Rightarrow$ absolute Konvergenz

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergent, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent

b) Insbesondere darf man bei absolut konvergenten Reihen rechnen wie bei konvergenten Reihen

c) Es gilt $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n\right| \underset{S1.2.16.)}{\leq} \sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$

//Idenditäten(900): 8.) $m,n\in \mathbb{Z}$, $\forall\ a_k \in \mathbb{C}$, $k\geq m$ $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum\limits_{k=m}^{n} |a_k|$ $(n\geq m)$//

Bew: mit S3.1.2 und 1.7 Identitäten 8.)

2.) Majorantenkriterium

$|z_n|\leq b_n$, $\forall\ n\geq n_0$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent

Bew: $|z_\nu|\leq b_\nu\ \forall\ \nu>0$ $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ konvergent $\Rightarrow$ $S_n=\sum\limits_{\nu=0}^{n} |z_\nu| \leq \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \nearrow B\in\mathbb{R}$

monoton $\nearrow$ und beschränkt durch B $\Rightarrow S_n\leq B\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu| < \infty$

(Kurzschreibweise: nach oben beschränkt)

Andere Formulierung:

Aus $|z_k|\leq b_k\ \forall\ k\geq p$ und $\sum\limits_{k=p}^{\infty} b_k<\infty$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=p}^{\infty} z_k$.

Bew: Folgt aus $\sum\limits_{k=p}^{n} |z_k| \leq \sum\limits_{k=p}^{n} b_k \leq \sum\limits_{k=p}^{\infty} b_k$.

Bsp: a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-3k}{k^4+1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \underbrace{\frac{1-\frac{3}{k}}{1+\frac{1}{k^4}}}_{\text{beschränkt } \leq K} \leq \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{K}{k^2}}_{\text{konvergiert}}$

3.) Minorantenkriterium (MinK)

$|z_n|\geq b_n\geq 0$ $\forall n\geq n_0$ und $\sum\limits_{n=0}^{n} b_n=\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|=\infty$

Bew: $|z_\nu|\geq b_\nu\geq 0$, $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \nearrow \infty \Rightarrow \sum\limits_{\nu=0}^{n} |z_\nu| \geq \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \nearrow \infty$

Andere Formulierung:

Gilt $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k=\infty$ und $|z_k|\geq \tilde{C} b_k$ für fast alle k mit $\forall\ k\in\mathbb{N}_0$ mit $\tilde{C}>0$, so ist $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k=\infty$ (d.h. ab bestimmtem Index m)

Bew: Gilt $|z_k|\geq \tilde{C} b_k\ \forall\ k\geq k_0$. $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} |z_k| = \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} |z_k| + \sum\limits_{k=k_0}^{n} |z_k| \geq \sum\limits_{k=k_0}^{n} |z_k| \geq \tilde{C} \sum\limits_{k=k_0}^{n} b_k \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

$\Rightarrow S_n$ unbeschränkt $\Rightarrow$ divergent

Bsp: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\rho}}$, $\rho\in\mathbb{R}$. $\rho\geq 2: \frac{1}{k^{\rho}}\leq\frac{1}{k^{2}}\ \ \forall\ k\in\mathbb{N} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{MajK}} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\rho}}<\infty$.

$\rho\leq 1: \frac{1}{k^{\rho}}\geq\frac{1}{k}\ \ \forall\ k\in\mathbb{N} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{MinK}} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\rho}}=\infty$

#Cauchy#

$1<\rho$: $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\rho}} \underbrace{=}_{*} \sum_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1}\frac{1}{k^{\rho}}}_{¿\frac{1}{2^{\nu\rho}}(\underbrace{2^{\nu+1}-2^{\nu}}_{2^{\nu}(2-1)})=\frac{1}{2^{\nu\rho}}\cancel{2^{\nu}}=\frac{1}{2^{\nu\rho-\nu}}*1} \leq \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{(\rho-1)}}\right)^{\nu}<\infty \text{ weil } \frac{1}{2^{\rho-1}}\underbrace{<}_{1<\rho} 1.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\rho}} \text{ konvergent} \Leftrightarrow \rho>1$$

* ν	2^{ν}	$2^{\nu}+1$...	$2^{\nu+1}-1$
0	$\underbrace{1}_{1.\text{Summand}}$		1
1	2		3
2	4	5….	7
3	8...............	9............	$\underbrace{15}_{2^{\nu+1}-1.\ \text{Summand}}$

$2^{\nu+1}-1-(2^{\nu}-1)=2^{\nu}$. Summanden $\qquad \geq \quad \frac{1}{2^{\nu\rho}} \quad \frac{1}{2^{(\nu+1)\rho}}$

Für $\nu=0$: $2^{3+1}-1-(2^{3}-1)$

4) Wurzelkriterium

4a) $\exists\ 0<q<1$ mit $\sqrt[n]{|z_n|}\leq q\ \ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|z_n|$ konvergent.

$\sqrt[n]{|z_n|}\geq 1$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|z_n|=\infty$.

Bew: $\sqrt[n]{|z_n|}\leq q<1\ \ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow |z_n|\leq q^{n}$, $\sum_{\nu=n_0}^{n}|z_{\nu}|\leq\sum_{\nu=n_0}^{n}q^{\nu} \nearrow \frac{1}{1-q}$,

$\sqrt[n]{|z_n|}\geq 1 \Rightarrow |z_n|\geq 1$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N} \Rightarrow z_n \overset{\rightarrow}{\text{nicht}}\ 0\ (n\rightarrow\infty)$ ...kann nicht konvergieren.

4b) Vor: In $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $z_n \neq 0 \;\forall\; n \geq n_0$

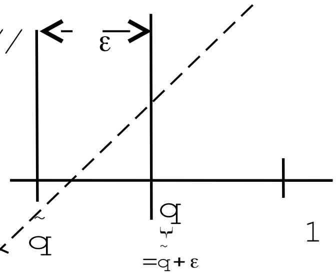
Beh.: (.) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent.

(..) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ divergent

//**D2.4.2''** (1507) $\overset{*}{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0$ gilt $\begin{cases} x_n \leq \overset{*}{x} + \varepsilon \text{ für fast alle } n \\ x_n \geq \overset{*}{x} - \varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases}$ //

//***S3.2.2*** *(1700) Vor:* $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *4a)* $\exists\; 0<q<1$ *mit* $\sqrt[n]{|z_n|} \leq q \;\forall\; n \geq n_0 \Rightarrow$//

// $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ *konvergent.*//



Bew: (.) Sei $\tilde{q} := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$

Wähle ε mit $q := \tilde{q} + \varepsilon < 1$

z.B. $\varepsilon = \frac{1-\tilde{q}}{2}$

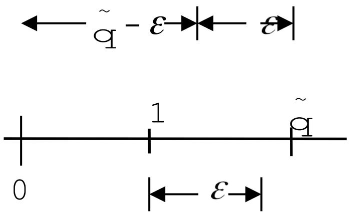
$\underset{D2.4.2''}{\Rightarrow} \exists\; n_0 \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{|z_n|} < \tilde{q} + \varepsilon = q < 1 \;\forall\; n \geq n_0, n \in \mathbb{N}_0 \underset{S3.2.2\,4a)}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent.

(..)

//**D2.4.2''** (1507)

// $\overset{*}{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0$ gilt: $\begin{cases} x_n \geq \overset{*}{x} + \varepsilon \text{ höchstens für endlich viele } n \\ x_n \geq \overset{*}{x} - \varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases}$ //

//**S3.1.2** (1602) $(z_\nu) \subset \mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent. *2.)* $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ *notwendig*//



Sei $\tilde{q} := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$

Wähle $\varepsilon > 0$: $\underbrace{\tilde{q} - \varepsilon}_{=q} \geq 1$

(z.B. $\varepsilon = \tilde{q} - 1$ oder $\varepsilon = \frac{\tilde{q}-1}{2}$) $\underset{D2.4.2''}{\Rightarrow} \sqrt[n]{|z_n|} > \tilde{q} - \varepsilon = q \geq 1$ (d.h. $|z_n| > q^n$)

für ∞ viele n $\underset{q\geq 1}{\Rightarrow} |z_n| \geq 1$ für ∞ viele n $\Rightarrow z_n \overset{\text{nicht}}{\rightarrow} 0\ (n\to\infty) \underset{S3.1.2\ 2.)}{\Rightarrow}$

$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ divergiert (insbesondere $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ divergiert)

5) Quotientenkriterium

Vor: $z_n \neq 0 \quad \forall\ n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}$ und $\exists\ 0<q<1$

5a) Vor: • $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq q<1 \quad \forall\ n \geq n_1 \geq n_0$ Beh: • $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$.

Vor: •• $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geq 1 \quad \forall\ n \geq n_2$ Beh: •• $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \infty$

Bew: Vorausbeispiel $\left|\frac{z_8}{z_7}\right|\left|\frac{z_7}{z_6}\right|\left|\frac{z_6}{z_5}\right| \leq q^{8-5}$

$$\left|\frac{z_n}{z_{n-1}}\right|\left|\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\right| \ldots \left|\frac{z_{n_1+1}}{z_{n_1}}\right| \leq q^{n-n_1} \Rightarrow \left|\frac{z_n}{z_{n_1}}\right| \leq q^{n-n_1} \Rightarrow |z_n| \leq \underbrace{|z_{n_1}|(q^{-n_1})}_{k>0} q^n \Rightarrow$$

$$|z_n| \leq kq^n \quad \forall\ n \geq n_1, \quad \sum_{\nu=n_1}^{n} |z_\nu| \leq k \sum_{\nu=n_1}^{n} q^\nu \leq k \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu \quad (n\to\infty)\ \frac{k}{1-q}$$

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} \geq 1 \quad \forall\ n \geq n_2 (\geq n_0) \Rightarrow |z_{n+1}| \geq |z_n| \geq |z_{n_2}| > 0 \Rightarrow z_n \overset{\rightarrow}{\text{nicht}}\ 0\ (n\to\infty)$$

5b) Beh: • $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1\ \forall\ n \geq n_1 \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$ ($\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent)

•• $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1 \quad \forall\ n \geq n_2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \infty$ divergent

Bew: • Sei $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1-2\underbrace{\delta_0}_{>0} =: q_0 \Rightarrow \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1-2\delta_0$

für höchstens endlich viele n ⇒

$$\exists\ n_1 > n_0:\ z_n \neq 0\ \&\ \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \underbrace{\leq}_{n>n_1} : q_0 \underbrace{\Rightarrow}_{n>n_1} \left|\frac{z_n}{z_{n_1}}\right| = \left|\frac{z_n}{z_{n-1}}\right|\left|\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\right| \ldots \left|\frac{z_{n_1+1}}{z_{n_1}}\right| \leq q_0^{n-n_1} \Rightarrow$$

$|z_n| \leq M_0 q_0^n$ mit $M_0 := |z_{k_1}|\ q_0^{-n_1} \Rightarrow \sum M_0 q_0^n$

ist konvergent Majorante zu $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent

•• Sei $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1+\underbrace{\delta_1}_{>0} \Rightarrow \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1+\delta_1$ für höchstens endlich viele n ⇒

$$\exists\ n_1 > n_0:\ z_n \neq 0\ \&\ \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \underbrace{\geq}_{n>n_1} : q_1 \underbrace{\Rightarrow}_{n>n_1} \left|\frac{z_n}{z_{n_1}}\right| = \left|\frac{z_n}{z_{n-1}}\right|\left|\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\right| \ldots \left|\frac{z_{n_1+1}}{z_{n_1}}\right| \geq q_1^{n-n_1} \Rightarrow$$

$|z_n| \leq M_1 q_1^n$ mit $M_1 := |z_{k_1}|\ q_1^{-n_1} \Rightarrow |z_n| \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ divergent

Bsp: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ist konvergent

Bew: $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\ \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n+1}\ \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = (1+\frac{1}{n})^n \geq 1+n\frac{1}{n} = 2 \Rightarrow \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq \frac{1}{2} \quad \forall\ n \Rightarrow$

$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ist konvergent

5b) Beh: (.) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent

(..) $\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ divergent

*//**S3.2.2** (1700) Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset C$, $n \in N_0$.//*

//5.) Quotientenkriterium $z_n \neq 0 \ \forall\ n \geq n_0$ und $\exists\ 0<q<1$ mit//

// $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq q \ \forall\ n \geq n_1 \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$. $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geq 1 \ \forall\ n \geq n_2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \infty$//

Bew: (.) Sei $\tilde{q} := \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$. Wähle $\varepsilon > 0 : q = \tilde{q} + \varepsilon < 1$ (z.B. $\varepsilon = \frac{1-\tilde{q}}{2}$) $\underbrace{\Rightarrow}_{D2.4.2''}$

$\exists\ n_1 \in N_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \tilde{q} + \varepsilon = q < 1 \ \forall\ n \geq n_1 \underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2-5.)-da\ 0<q<1} \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert absolut

Andere Formulierung (.):

*//**D2.4.2''**(1507)//*

//Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Eine Zahl $\overset{*}{x}$ heißt dann der größte//

//HP oder limes superior der Folge (x_n), wenn gilt://

// $\overset{*}{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ *gilt:* $\begin{cases} x_n \geq \overset{*}{x} + \varepsilon \text{ höchstens für endlich viele n} \\ x_n \geq \overset{*}{x} - \varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele n} \end{cases}$ //

*//**S3.1.1** (1601)* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k = \dfrac{1}{1-z}\quad \forall\ |z|<1.$*//*

Bew:(.)Sei $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1-2\delta_0<1,\ \delta_0>0 \underset{D2.4.2}{\underbrace{\Rightarrow}} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| > \underbrace{1-\delta_0}_{>1-2\delta_0} =: q_0$ für

höchstens endlich viele n. $\exists\ n_1$ (das ohne Einschränkung

größer als n_0 ist#?#), sodass $z_n\neq 0$ und $\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq q_0$ für $n>n_1$ gilt $\Rightarrow$

$\left|\dfrac{z_n}{z_{n_1}}\right| = \left|\dfrac{z_n}{z_{n-1}}\right|\left|\dfrac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\right| \ldots \left|\dfrac{z_{n_1+1}}{z_{n_1}}\right| \leq q_0^{n-n_1} \Rightarrow |z_n| \leq M_0 q_0^n$ mit $M_0 := |z_{n_1}|\, q_0^{-n_1}$.

Damit ist $\sum M_0 q_0^k$ nach S3.1.1 eine konvergente Majorante für $\sum |z_n|$ und somit $\sum z_n$ nach 2.) absolut konvergent.

//**S3.1.2** (1602) $(z_\nu) \subset \mathbb{C}$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent. *2.)* $z_n \underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} 0$ *notwendig//*

(..)Sei $\tilde{q} := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1$. Wähle $\varepsilon>0: \tilde{q}-\varepsilon =: q \geq 1$ (z.B. $\varepsilon = \dfrac{1-\tilde{q}}{2}$ oder

$\varepsilon = \tilde{q}-1) \underset{D2.4.2''}{\underbrace{\Rightarrow}}\ \exists\ n_2 \in \mathbb{N}_0: \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| > \underbrace{q-e}_{\geq 1} = q\ \ \forall\ n\geq n_2 \underset{q\geq 1}{\underbrace{\Rightarrow}} |z_{n+1}| \geq |z_n|\ \ \forall\ n\geq n_2$

$\Rightarrow |z_n| \geq \underbrace{|z_{n_2}|}_{>0}\ \ \forall\ n\geq n_2 \Rightarrow z_n \overset{\text{nicht}}{\to} 0\ (n\to\infty) \underset{S3.1.2\ \neg 2.)}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ divergiert (insbesondere $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ divergiert)

Andere Formulierung (..):

Sei $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1+\delta_1$ für $\delta_1>0 \underset{D2.4.2}{\underbrace{\Rightarrow}} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1+\delta_1$ für höchstens

endlich viele n. $\exists\ n_1>n_0$, sodass $z_n\neq 0$ und $\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geq 1+\delta_1 =: q_1$ ist

$\forall\ n>n_1 \Rightarrow \left|\dfrac{z_n}{z_{n_1}}\right| = \left|\dfrac{z_n}{z_{n-1}}\right|\left|\dfrac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\right| \ldots \left|\dfrac{z_{n_1+1}}{z_{n_1}}\right| \geq q_1^{k-k_1} \Rightarrow |z_n| \geq M_1 q_1^k$ mit $M_1 := |z_{k_1}|\, q_1^{-k_1} \Rightarrow$

$|z_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $\sum z_n$ ist divergent.

Achtung!
Will man das Wurzel- oder Quotientenkriterium anwenden, so darf man sich nicht mit dem Nachweis begnügen, dass

$\sqrt[n]{|z_n|}$ bzw $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ fast immer <1 ist. Es ist vielmehr unumgänglich, eine feste postive Zahl q<1 aufzufinden und die ab einer Stelle nicht mehr von $\sqrt[n]{|z_n|}$ bzw $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ übertroffen wird. Wenn die besagten Wurzeln bzw Quotienten zwar <1 sind, aber doch beliebig nahe an 1 herankommen, versagen beide Kriterien (sie bringen keine Entscheidung):

$\sum \frac{1}{n}$ divergiert, $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert – aber in beiden Fällen strebt sowohl die Wurzel als auch die Quotientenfolge gegen 1.

*//**D2.4.2''**(1507)//*

// Bem 4.)Es gilt stets $\underline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} \le \overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} \le \overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ *//*

Bem: D2.4.2'' Bem 4.) ⇒
Falls Quotientenkriterium anwendbar, so ist auch Wurzelkriterium anwendbar. Umkehrung gilt iA nicht.
Das Wurzelkriterium ist mächtiger als das Quotientenkriterium.
Falls $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=1$, macht es keinen Sinn, das Wurzelkriterium zu probieren: $1=\underline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \le \overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \le \overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=1 \Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1 \Rightarrow$
keine Entscheidung mit dem Wurzelkriterium möglich. Es gilt sogar $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$ da auch $\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$

Bem:1.)Beide Kriterien verlangen „schnelle„, d.h. geometrische Konvergenz, d.h. $|z_n|\le cq^n$ mit q<1,c>0,
$|R_n|\le c\sum_{k=n+1}^{\infty} q^k = c\, q^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{c}{1-q}q^{n+1}$.

2.)Gilt $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}\ge 1 \Rightarrow \exists$ Teilfolge $|z_{n_k}|\to\infty \Rightarrow$ Divergenz

Gilt $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{z_{n+1}}{z_n}>1 \Rightarrow$ Divergenz $\Leftarrow \left|\frac{z_{n_k+1}}{z_{n_k}}\right|\ge 1$

3.) Falls $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|}=1$ bzw $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=1$, so kann

Divergenz oder Konvergenz für $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ vorliegen.

Bsp $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$

//S2.3.18(1409) 11.)(1412)Für $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$ gilt immer $e\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$ //

//S1.6.2(802)Vor. $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ 2.)$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ //

Bsp:1.)# $\frac{1}{k!}<\frac{1}{e\left(\frac{n}{e}\right)} \Rightarrow \frac{|z^n|}{k!}=\left|\frac{z^n}{k!}\right|<\frac{|z^n|}{e\left(\frac{n}{e}\right)}\underbrace{=}_{S1.6.2\ 2.)}\frac{|z|^n}{e\left(\frac{n}{e}\right)}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{k!}$ abs konvergent da $\sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{k!}\right|}\underbrace{\leq}_{S2.3.1\ 14.)}|z|\sqrt[n]{\frac{1}{\left(\frac{n}{e}\right)^n e}}\underbrace{\to}_{n\to\infty}0$

2.) $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n}z^n$ konvergiert $\forall\ z\in U_1(0)$ da

$$\left|\frac{\binom{n+1+\alpha}{n+1}z^{n+1}}{\binom{n+\alpha}{n}z^n}\right|=|z|\left|\frac{n+1+\alpha}{n+1}\right|\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}|z|<1$$

Bem: $\sum_{k=0}^{\infty}|z_k|<\infty \Rightarrow \not\Leftarrow \sum_{k=0}^{\infty}|z_k|^2<\infty$

A3.2.2 Untersuche folgende unendliche Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+2}{n^4+n^2-1}$

Lös:Für $n\in\mathbb{N}$ gilt $\frac{n^3+2n+2}{n^4+n^2-1}\geq\frac{n^3}{n^4+n^2-1}\geq\frac{n^3}{n^4+n^2}\geq\frac{n^3}{n^4+n^4}=1/2n$

$\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ ist divergent, deshalb auch $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+2}{n^4+n^2-1}$ nach Minoritätskriterium.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+2}{n^5+n^2-1}$

Lös: $\frac{n^3+2n+2}{n^5+n^2-1}\leq\frac{n^3+2n^3+2n^3}{n^5+n^2-1}\leq\frac{5n^3}{n^5}=\frac{5}{n^2}$. $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$ konvergent, also

nach Majorantenkriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+2}{n^5+n^2-1}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^5 + 2}{4^n}$, $n\in\mathbb{N}$

//**A2.1.8** (1207) a)Beh: $\forall$ $p\in\mathbb{N}$ gilt $0 \le x_n=\sqrt[n]{n^p}-1\to 0\,(n\to\infty)$//

Lös: $\frac{3^n n^5 + 2}{4^n} \le 2* \frac{3^n n^5}{4^n} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n n^5 \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \left(\frac{15}{16}\right)^n * 2 * \left(n\left(\left(\frac{4}{5}\right)\right)^n\right)^5 =$

$$\left(\frac{15}{16}\right)^n * 2 * \underbrace{\left(\underbrace{n^{\frac{5}{n}}}_{A2.1.8:\to 1}\frac{4}{5}\right)^n}_{<1} \le 2*\left(\frac{15}{16}\right)^n \Rightarrow$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{15}{16}\right)^n$ konvergent, also nach Majkrit auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^5 + 2}{4^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4^{-n}\binom{2n}{n}$

//***S1.7.4*** *(906)* $\alpha\in C$ ˅ $n,m\in N_0$: *2.)* $\binom{n}{m} = \begin{cases} 0 \text{ falls } n < m \\ \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{falls } n \ge m \end{cases}$//

//***S3.1.4*** *(1605)Leibniz Kriterium Vor:* $(a_n)\subset R$, $a_n \searrow 0\,(n\to\infty)$.//

Lös: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b^n$, wobei $b_n=4^{-n}\binom{2n}{n}$.

$$b_{n+1}=4^{-n-1}\binom{2n+2}{n+1} \underbrace{=}_{S1.7.4\,2.)} 4^{-n-1}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = 4^{-n-1}\frac{(2n+2)(2n+1)2n!}{(n+1)!(n+1)!} \underbrace{=}_{S1.7.4\,2.)}$$

$$\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}4^{-n}\binom{2n}{n} = \underbrace{\frac{2n+1}{2n+2}}_{<1} b_n \le b_n \Rightarrow (b_n)_{n=1}^{\infty} \searrow 0 \quad (n\to\infty)$$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.1.4} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ ist konvergent nach Leibnizkriterium.

A3.2.3 Konvergenz und absolute Konvergenz?

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{5^k}$ mit $z\in\mathbb{C}$.

Lös: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{5^k} = \frac{1}{1-\frac{2}{5}}$, wenn $|z|<5$.

Für $|z|>5$ ist $\left|\frac{z}{5}\right|^k \ge 1$, d.h $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{5^k}$ ist divergent

b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left(e-\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-k}\right)$

Lös: Definiere $b_n=(1-1/n)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$ für $n\geq 2$. Außerdem gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\frac{n}{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\frac{n^2}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1}>(1+1/n)\frac{n}{n+1}=1 \Rightarrow$$

$$b_n \nearrow \Rightarrow e-\frac{1}{b_n} \nearrow \Rightarrow \frac{1}{b_n}-e \searrow \text{mit} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}-e\right)=0$$

Noch zu zeigen: $\sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(e-\frac{1}{b_k}\right)$ ist nicht absolut konvergent, d.h.

$\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{b_k}-e\right)$ ist divergent

Beachte, dass für $n\geq 2$ gilt:

$$\frac{1}{b_n}-e\geq\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{2n}}=\frac{1}{b_{2n}}\left(\frac{b_{2n}}{b_n}-1\right)\geq e\left(\frac{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}-1\right)=e\left(\left(\frac{\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2}{\frac{n-1}{n}}\right)^n-1\right)=$$

$$e\left(\left(\frac{4n^2-4n-1}{4n^2}\frac{n}{n-1}\right)^n-1\right)=e\left(\left(\frac{4n^2-4n-1}{4n^2-4n}\right)^n-1\right)=e\left(\left(1-\frac{1}{4n(n-1)}\right)^n-1\right)$$

$$\underset{\text{Bern}}{\geq}\frac{e}{4(n-1)}.$$

Da $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{e}{4(n-1)}$ divergiert, ist nach Majorantenkriterium auch

$\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{b_k}-e\right)$ divergent.

Anderer Weg mit absoluter Konvergenz mit Hilfe

$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq-\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

A3.2.4 Bestimme jeweils für alle $z\in\mathbb{C}$, für die folgende unendliche Reihen konvergieren:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$

Lös: Quotientenk: $\left|\frac{z^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}\frac{(2k)!}{z^{2k}}\right|=\frac{|z|^2}{(2n+1)(2n+2)}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall z\in\mathbb{C} \Rightarrow$ Konv für alle z

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^k z^k$

Lös: Wurzelkriterium $\sqrt[n]{|n^n z^n|}=n|z|=0<1$ falls $n|z|<1 \Rightarrow$

$|z|<1/n:=\varepsilon \Rightarrow |z|<\varepsilon \quad \forall \varepsilon>0 \Rightarrow |z|=0$

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1+1/k)^{k^2} z^k$

Lös: Wurzelkriterium $\sqrt[n]{(1+1/n)^{n^2}}\sqrt[n]{|z|^n}=(1+1/n)^n|z|\to e|z|<e\frac{1}{e}\Rightarrow|z|<\frac{1}{e}$

A3.2.5 $a_n \in \mathbb{C},\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, Zeige

a) Ist $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut

Bew: Sei $\tilde{q} := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Wähle $\varepsilon > 0$: $\underbrace{\tilde{q}+\varepsilon}_{:=q} < 1$ (z.B. $\varepsilon = \frac{1-\tilde{q}}{2}$) $\Rightarrow$

$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}_0$: $\sqrt[n]{|a_n|} < \tilde{q} + \varepsilon = q < 1\ \ \forall\ n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

b) Ist $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Bew: Sei $\tilde{q} := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Wähle $\varepsilon > 0$: $\underbrace{\tilde{q}+\varepsilon}_{:=q} > 1$ (z.B. $\varepsilon = \frac{\tilde{q}-1}{2}$ oder $\varepsilon = \tilde{q} - 1$) $\Rightarrow$

$\sqrt[n]{|a_n|} > \tilde{q} - \varepsilon = q$ für ∞ viele n $\underset{q \geq 1}{\Rightarrow}$ $|a_n| \geq 1$ für ∞ viele n $\Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

c) Ist $a_n \neq 0\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ und $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Bew: $\tilde{q} := \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, Wähle $\varepsilon > 0$: $\underbrace{\tilde{q}+\varepsilon}_{:=q} < 1$ (z.B. $\varepsilon = \frac{1-\tilde{q}}{2}$) $\Rightarrow$

$\exists\ n_1 \in \mathbb{N}_0$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \tilde{q} + \varepsilon = q < 1\ \ \forall\ n \geq n_1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

d) Ist $a_n \neq 0\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ und $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, so divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Bew: $\tilde{q} := \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, Wähle $\varepsilon > 0$: $\underbrace{\tilde{q}-\varepsilon}_{:=q} < 1$ (z.B. $\varepsilon = \frac{1-\tilde{q}}{2}$ oder $\varepsilon = \tilde{q} - 1$) $\Rightarrow$

$\exists\ n_2 \in \mathbb{N}_0$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \tilde{q} - \varepsilon = q \geq 1\ \ \forall\ n \geq n_2 \underset{q \geq 1}{\Rightarrow} |a_{n+1}| \geq |a_n|\ \ \forall\ n \geq n_2 \Rightarrow |a_n| \geq |a_{n_2}| \Rightarrow$

$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

A3.2.6 Konvergenz, absolute Konvergenz?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$

//**S3.1.2** (1602) Vor: $(z_\nu) \subset \mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent.//

//Beh:Notwendiges Konvergenzkriterium 2.) $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$*//*

Lös: $\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}} \not\to 0\ (n\to\infty)$ (da $\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$) $\underset{S3.1.2\,2.)}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ konvergiert nicht $\underset{S3.2.2}{\Rightarrow}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ konvergiert nicht absolut

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ für $\alpha\in\mathbb{R}$(fest)

*//**S3.1.4** (1605)Leibniz Kriterium//*
//Vor: $(a_n)\subset\mathbb{R}$, $a_n\searrow 0\,(n\to\infty)$.//

Lös: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ konvergiert absolut $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}<\infty$ $\Leftrightarrow$ $\alpha>1$

$\alpha>1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ konvergiert, da absolut konvergent

$0<\alpha\leq 1$:Wegen $\frac{1}{n^{\alpha}}\searrow 0\,(n\to\infty)\underbrace{\Rightarrow}_{S3.1.4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ konvergent

$\alpha\leq 0$: $\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\not\to 0\,(n\to\infty)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ konvergiert nicht

$|\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}|\not\to 0\,(n\to\infty)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ konvergiert nicht absolut.

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{3n}{2n}}$

*//**S3.2.2**(1700)//*
//Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$.//
//Quotientenkriterium//
//7.)Gilt für eine unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}z_k$, $z_k\neq 0$ $\forall$ $n\geq n_0$://

// (.) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|<1$, so ist sie absolut konvergent //

// (..) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|>1$, so ist sie divergent//

Lös: $a_n=\frac{1}{\binom{3n}{2n}}$, Binominalkoeff>0, deshalb ||weglassen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\binom{3n}{2n}}{\binom{3n+3}{2n+2}}=$

$$\frac{(3n)!\,(2n+2)!\,(n+1)!}{(2n)!\,n!\,(3n+3)!}=\frac{(2n+1)\,(2n+2)\,(n+1)}{(3n+1)\,(3n+2)\,(3n+3)}=$$

$$\frac{1}{3}\frac{(2+\frac{1}{n})\,(2+\frac{2}{n})}{(3+\frac{1}{n})\,(3+\frac{2}{n})}\underbrace{\to}_{n\to\infty}\frac{2^2}{3^3}=4/27,\text{ insbesondere }\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=4/27<1$$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2\ 7.)}\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ konvergiert absolut $\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2\ 1.)}\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ konvergiert

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

Lös: $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\underbrace{\geq}_{n^2\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n}=\infty\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2\ 3.)}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\infty$ divergiert $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ konvergiert nicht und nicht absolut

e) $q+1+q^3+q^2+q^5+q^4+q^7+q^6+\ldots$ für $|q|<1$ (fest).

//**S3.2.2** *(1700) Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ 1.) $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent.*//

Lös: # 0 1 2 3 4 5 6 7...
hoch 1 0 3 2 5 4 7 6...

$a_n=\begin{cases} q^{n+1} \text{ falls n gerade} \\ q^{n-1} \text{ falls n ungerade} \end{cases}$, wobei $q\in\mathbb{C}$ mit $|q|<1$ (fest)

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim\limits_{n\to\infty} |q|^{1+\frac{1}{2n}} = |q|$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} |q|^{1-\frac{1}{2n+1}} = |q| \Rightarrow$

$(\sqrt[n]{|a_n|})_{n=0}^{\infty}$ hat als einzigen Häufungswert $|q| \Rightarrow$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |q| < 1 \underbrace{\Rightarrow}_{\sqrt{\ } \text{Krit}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv, (sogar $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |q|$)

Bem: Quotientenkriterium hier nicht anwendbar:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} |q|^3, \text{ falls n ungerade} \\ \frac{1}{|q|}, \text{ falls n gerade} \end{cases} \Rightarrow \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |q|^3<1,\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1/|q|>1$$

Die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ergibt sich auch aus S3.2.8, da

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist (& $\sum_{n=0}^{\infty} |q|^n<\infty$ da $|q|<1$)

A3.2.7 Kann man mit Hilfe des Wurzel- oder Quotientenkriteriums auf die Konvergenz der folgenden Reihen schließen?

(.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}, m\in\mathbb{Z}$ (..) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+1/k)^k}$

Bew: (.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$ konv $m\geq 2$

(..) $\sqrt[k]{|z_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{(1+1/k)^k}} = \frac{1}{1+1/k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$,

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|z_k|} = 1$ keine Aussage möglich:

$\sqrt[k]{|z_k|} \leq 1$, $\sqrt[k]{|z_k|} \leq q < 1$ nicht möglich

$\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| = \frac{(1+\frac{1}{k})^k}{(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{e} = 1$ keine Aussage möglich! Aber

$z_k = \frac{1}{(1+1/k)^k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+1/k)^k}$ monoton wachsend $\Rightarrow$ unbeschränkt $\Rightarrow$ divergent.

A3.2.8 Untersuche folgende Reihen auf absolute Konvergenz:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

Lös:Quotientenkriterium $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)!\,k^k}{(k+1)^{k+1}k!} = \frac{(k+1)}{(k+1)}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 =$

$\frac{1}{(1-1/k)^k} \to 1/e<1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ absolut konvergent $\Rightarrow$ konvergent.

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + k}{k^3+1}$, Hinweis:Folgere zunächst aus S2.2.2 Bsp 1 ●●, daß

die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent ist.

//S1.2.1 (406) Vor: K angeordnet, a,b∈K 6.)|a+b|≤|a|+|b|//

Lös: Majorantenkriterium..$\left|\frac{(-1)^k + k}{k^3+1}\right| \underbrace{\leq}_{S1.2.1\ 6.)} \frac{1+k}{k^3+1} \leq \frac{1+k}{k^3} \leq \frac{2k}{k^3} = \frac{2}{k^2}$

konvergente Majorante $\Rightarrow$ absolut konvergent, da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

konvergente Majorante.

Andere Formulierung:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent, $0 \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k} \Rightarrow$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k}$

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k\cdot 2^k}{3^k}$

Lös:Zeige (.)$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k}$ und (..)$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k\cdot 2^k}{3^k}$ absolut konvergent $\Rightarrow$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k\cdot 2^k}{3^k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k\cdot 2^k}{3^k}$ absolut konvergent.

(.)Wurzelk. $\sqrt[k]{\frac{k^2}{3^k}} = \frac{\left(\sqrt[k]{k}\right)^2}{3} \to 1/3<1$ absolut konvergent

(..)Wurzelk. $\sqrt[k]{\frac{k\cdot 2^k}{3^k}} = \sqrt[k]{k}\,\frac{2}{3} \to 2/3<1$ absolut konvergent..

ursprüngliche Reihe konvergent

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k+1}$

//4a) $\exists$ $0<q<1$ mit $\sqrt[n]{|z_n|} \le q$ $\forall$ $n \ge n_0$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent.

Lös: $\left|\frac{\frac{2^{k+1}}{3^{k+1}+1}}{\frac{2^k}{3^k+1}}\right| = \frac{2^{k+1}(3^k+1)}{(3^{k+1}+1)2^k} = 2\frac{3^k+1}{3^{k+1}+1} = 2 \underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty} 2\frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}}$ & $\underline{\lim_{k\to\infty}} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k+1}$

konvgt $\Rightarrow$ ($\frac{2^k}{3^k+1}$ ist Nullfolge)

e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}$

Lös: $\frac{k^3}{k^3+1} = 1 - \underbrace{\frac{1}{k^3+1}}_{\le\frac{1}{2}} \ge \frac{1}{2}$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\frac{k^2}{k^3+1} = \frac{1}{k}\frac{k^3}{k^3+1} \ge \frac{1}{2}\frac{1}{k}$ $\Rightarrow$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2}\frac{1}{k})$ Minorante zu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}$.

Würde $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2}\frac{1}{k})$ konvergieren,

so wäre $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2}\frac{1}{k})$ auch konvergent

im Widerspruch zur Divergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ $\Rightarrow$ Minorante divergent $\Rightarrow$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}$ divergent

Anmerkung: $\frac{k^2}{k^3+1} = \frac{k^{-1}}{1+k^{-3}} \underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty} 0$ ...Nullfolge

f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3k+1}$

Lös: $\frac{2k}{3k+1} = \frac{2}{3+k^{-1}} \underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty} \frac{2}{3} \ne 0$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3k+1}$ divergent

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Lös: $\left|\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}\right| = \frac{(n+1)!(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!n!n!} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n^2+2n+1)}{4n^2+6n+2)} \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$

$(\underline{\lim_{x\to\infty}}$ & $\overline{\lim_{x\to\infty}}) = \frac{1}{4}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ist konvergent

h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9^{\log(k)}}$

Lös: $\frac{1}{9^{\log(k)}} = 9^{-\log(k)} = e^{-\log(9)\log(k)} = k^{-\log(9)}$. $e^2 \underset{e<3}{\lesssim} 9 \Rightarrow 2\log(9) \Rightarrow \sum \frac{1}{k^2}$ konv Maj $\Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9^{\log(k)}}$ konvergiert

i) • Bsp für Reihe die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert?

Lös: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$, konvergent nach Leibnitzkrit, da $\frac{1}{k} \downarrow$ & alternierend

$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \frac{1}{k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent.

• • Bsp für Reihe die divergiert, aber S3.2.2 5b) nicht erfüllt?

//S3.2.2(1700)

//Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}, (w_n)_{n=0}^{\infty} \subset C$, $n \in N_0$.

//5b)Beh: • $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1 \ \forall \ n \geq n_1 \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$ ($\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *absolut konvergent)*

// • • $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1 \ \forall \ n \geq n_2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \infty$ *divergent*

Lös: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}$ divergiert nach e), aber

$$\left|\frac{\frac{(k+1)^2}{(k+1)^3+1}}{\frac{k^2}{k^3+1}}\right| = \frac{(k+1)^2(k^3+1)}{((k+1)^3)k^2} = \frac{(k^2+2k++1)(k^3+1)}{(k^3+3k^2+3k+1)k^2} = \frac{k^5+2k^4+k^3+k^2+2k+1}{k^5+3k^4+3k^3+k^2} \underset{k\to\infty}{\underbrace{\longrightarrow}} 1$$

• • • Bsp für Reihe die divergiert, aber beschränkt ist?

Lös: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$, da Partialsummenfolge -1,0,-1,0,....ist beschränkt, divergent, da HW 0 und -1

S3.2.3(1717) Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Vor: $(z_n),(w_n) \subset \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|^2 < \infty$

Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n w_n| < \infty$ und es gilt $\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n w_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n w_n| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|^2}$

*//**S1.9.3** (1150) Vor: $n \in N_0, a_k, b_k \in C$, $1 \leq k \leq n$ dann//*

//Beh: $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k|^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2)(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^2)$ auch $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2} \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^2}$ //

*//**S1.2.1** (406) Vor: K angeordnet, $a,b \in K$ 6.) $|a+b| \leq |a|+|b|$//*

*//**S3.2.2** (1700) Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ Beh: 1.) $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent.*

//S2.1.2 (1250) Vor: Seien $(a_n),(b_n)$ aus R konvergent mit $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a, b_n \xrightarrow{n\to\infty} b$//

//Beh 7.) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$//

//**S1.9.3'**(1151)

// Cauchy-Schwarz Ungleichung ($\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$ statt $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k|$ in S1.9.3)//

//Vor: $n \in \mathbb{N}_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$ Beh: $\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}}_{A} \underbrace{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} b_k^2}}_{B}$ //

Bew: $\left|\sum_{n=0}^{k} z_n w_n\right| \underbrace{\leq}_{S1.2.16.)} \sum_{n=0}^{k} |z_n w_n| \underbrace{\leq}_{S1.9.3'} \left(\sum_{n=0}^{k} |z_n|^2 \sum_{n=0}^{k} |w_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |w_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\underbrace{=}_{Vor} : k < \infty \underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.2\ 7.)} \sum_{n=0}^{\infty} |z_n w_n| < \infty \underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2} \sum_{n=0}^{\infty} z_n w_n$ ist konvergent.

Nach den Grenzwertregeln gilt die Beh.

A3.2.9 $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Beweise:

Abelsches Kriterium: Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und die

Folge $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ monotone Nullfolge, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$.

A3.2.10 Doppellimes, iterierte Grenzwerte, sofern existent

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\mu}}$, Konvergenz für $\mu \in R$

//**S3.2.2** 2.)Majorantenkriterium

// $|z_n| \leq b_n$, $\forall$ $n \geq n_0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent

a) $\mu > 1$ b) $\mu \geq 2$ mit Majorantenkriterium

Lös: a) $n \in N$: $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} < \frac{2^n}{2^{n*\mu}} = 2^{(1-\mu)n}$ ...2^n Summanden, größter $\frac{1}{2^n+1} < S \frac{1}{2^n}$

n=1, k=3,4; n=2, k=2,...8 usw

*: Für geignete $r,s \in N$, mit $m \geq 2^r$, $n \leq 2^{s+1}$, $n>m$, $r<s+1$

oBdA $n>m$, $|S_n - S_m| = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^{\mu}} \leq \sum_{k=2^r+1}^{2^{s+1}} \frac{1}{k^{\mu}} \underbrace{=}_{*} \sum_{k=r}^{s} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k^{\mu}} < \sum_{k=r}^{s} 2^{(1-\mu)n} =$

$2^{(1-\mu)r} \sum_{n=0}^{s*r} 2^{(1-\mu)n} = 2^{(1-\mu)r} \left(\frac{1-2^{(1+)(s-r+1)}}{1-2^{n-\mu}} \right)$

$\frac{1-2^{(1+)(s-r+1)}}{1-2^{n-\mu}}$ ist beschränkt durch $\left| \frac{1}{1-2^{1-\mu}} \right|$ denn $0 < 2^{(1-\mu)(s-r+1)} < 1$

$|S_n - S_m| < \underbrace{2^{(1-\mu)r}}_{\to 0} \left| \underbrace{\frac{1}{1-2^{1-\mu}}}_{beschränkt} \right|$

b) $\frac{1}{k^{\mu}} \leq \frac{1}{k^2}$ für $\mu \geq 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\mu}}$ konvergiert nach Majorantenkriterium durch Vergleich mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

A3.2.11

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2-1}{k^2-3k+4}$

Lös: $\frac{2k^2-1}{k^2-3k+4} \underbrace{\to}_{k\to\infty} 2$ … da $\frac{2k^2-1}{k^2-3k+4} \not\to 0 \Rightarrow$ Divergenz

$\frac{2k^2-1}{k^2-3k+4} > 0$ $\forall$ $\kappa \in N$ $\Rightarrow$

Partialsummenfolge S_n streng mnoton wachsend, unbeschränkt $\Rightarrow S_n \underbrace{\rightleftarrows}_{n\to\infty}$ ∞

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{k^k+1}}$

//**S3.2.2** 2.)Majorantenkriterium

// $|z_n| \le b_n$, $\forall$ $n \ge n_0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent

Lös: $\left|\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right| = \sqrt{\frac{k}{k+1}} \le k^{-3/2} = (\frac{1}{k})^{3/2}$. $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k})^{3/2}$ nach Bsp Seite 1702 konvergent

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.22.)} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{k^k+1}}$ konvergent.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

//**S3.2.2** 5b)Beh: • $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1 \; \forall \; n \ge n_1 \ge n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$ ($\sum_{n=0}^{\infty} z_n$

// absolut konvergent)

Lös: $\frac{2^k}{k!} \neq 0$ $\forall$ $n \in$ N. $\overline{\lim_{k\to\infty}} = \left|\frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}}\right| = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left|\frac{2}{k+1}\right| = 0 < 1 \underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.25b)}$ Konvergenz $(=e^2)$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1}$

//**S3.2.2** 4a) $\exists$ $0<q<1$ mit $\sqrt[n]{|z_n|} \le q$ $\forall$ $n \ge n_0$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent.

Lös: $\sqrt[k]{\left|\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1}\right|} \underbrace{=}_{k\to\infty} \left(\underbrace{\frac{k}{3k-1}}_{\to 1/3}\right)^2 \underbrace{\sqrt[k]{\underbrace{\frac{3k-1}{k}}_{\to 3}}}_{\to 1} \underbrace{\to}_{k\to\infty} \frac{1}{9} \Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1}\right|} = \frac{1}{9} < 1 \underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2\,4a)}$ konverg

S3.2.4(1719) Verdichtungssatz von Cauchy

Vor: $(a_n) \subset$ R, $a_n \searrow$

Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent

#Bew: Hilfsmittel: $\alpha>0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \underbrace{\le}_{\alpha>1} \infty$, da $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha}}_{\frac{1}{(2^n)^{\alpha-1}} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n \text{geom. R}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)}_{=q<1}^n < \infty \Leftrightarrow$

$\alpha>1$

$n<2^{m+1}$: $\sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} a_k = \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} a_k \underbrace{\le}_{*} \sum_{\nu=0}^{m} (2^{\nu+1}-1-2^\nu+1) a_{2^\nu} = \sum_{\nu=0}^{m} 2^\nu(2-1) a_{2^\nu} =$

$\sum_{\nu=0}^{m} 2^\nu a_{2^\nu} \le A < \infty$.

$*2^{\nu+1}-1-2^\nu+1$=Zahl der Summanden,

$*a_n \searrow$ d.h. a_{2^ν} größter Summand für jeweils m

$n \ge 2^{m+1}$: $\infty > B \ge \sum_{k=1}^{2^{m+1}} a_k = a_1 + \sum_{\nu=1}^{m+1} \sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} a_k \ge a_1 + \sum_{\nu=1}^{m+1} 2^{\nu-1} a_{2^\nu}$.

Andere Formulierung:

Sei $(a_k)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$, und sei

$b_k=2^k a_{2^k}$ für $k\geq 0$. Dann sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ entweder beide konvergent oder beide bestimmt divergent.

Bew: Setze $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n=\sum_{k=0}^{n} b_k$.

$$n<2^{m+1}: S_n \leq \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} a_k=\sum_{\nu=0}^{m} \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} a_k \leq \sum_{\nu=0}^{m} (2^{\nu+1}-1-2^\nu+1)a_{2^\nu}=\sum_{\nu=0}^{m} 2^\nu(2-1)a_{2^\nu}=\sum_{\nu=0}^{m} 2^\nu a_{2^\nu}=T_m.$$

$$n\geq 2^{m+1}: S_n\geq \sum_{k=1}^{2^{m+1}} a_k=a_1+\sum_{\nu=1}^{m+1} \sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} a_k\geq a_1+\sum_{\nu=1}^{m+1} 2^{\nu-1}a_{2^\nu}=a_1+T_{m+1}/2$$

$\underbrace{\Rightarrow}_{(T_m)\,beschränkt}$ (S_n) beschränkt und

$\underbrace{\Rightarrow}_{(S_m)\,beschränkt}$ (T_n) beschränkt und daher gilt die Beh.

Andere Formulierung Bew:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent (d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = G_0 - a_0 = G_1$) $\Leftrightarrow$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent (d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = G_1 + a_0 = G_0$)

$a_n \searrow \Rightarrow a_k \le a_{2^n}\ \forall\ k \ge 2^n$ und $a_k \ge a_{2^n}\ \forall\ k \le 2^n\ \forall\ n \in N_0 \Rightarrow$

$2^n a_{2^n} = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_{2^n} \ge \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \Rightarrow$ konvergente $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \ge \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent

$2^n a_{2^n} = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} a_{2^n} \underbrace{\le}_{n\ge 1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} a_k \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bsp:1.) $\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(\log n)^\alpha}}_{\text{monoton fallend}\to 0} < \infty$, $\alpha>0$...für welche α Konvergenz?

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n(\log 2^n)^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \log 2)^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{(\log 2)^\alpha}}_{>0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{\alpha n}} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^n < \infty \Leftrightarrow$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n < \infty$ (geometrische Reihe, $0<q<1$) $\Leftrightarrow q = \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$

2.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^\alpha}$ (Nenner $\nearrow$ $\alpha>0$, Bruch$\to 0$)$<\infty$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \log 2^n (\log\log 2^n)^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \frac{1}{\log 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\underbrace{\log(n\log 2)}_{(\log n + \log\log 2)})^\alpha} < \infty \underbrace{\Leftrightarrow}_{S3.2.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(\log 2^n + \log\log 2)^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\log 2 + \log\log 2)^\alpha} < \infty \Leftrightarrow$$

(Form) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{(an+b)^\alpha}_{a,b>0}} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha > 1$

A3.2.10

a) Beweise den Cauchy'schen Verdichtungssatz: Es sei $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen.

Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

Bew: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sei eine monoton fallende Folge mit $a_n \geq 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

„⇐" Es genügt, zu zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ beschränkt ist, da

$(a_n)_{n=1}^{\infty} \searrow$, $a_n \geq 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty\ ?} 2^k a_{2^k} \underbrace{=}_{*} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=2^{k-1}+1}^{2^k} 2 * a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=2^{k-1}+1}^{2^k} 2a_\nu \leq 2 * \sum_{j=2}^{2^n} a_j \leq 2 \sum_{j=2}^{\infty} a_j.$$

$$\# \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \underbrace{=}_{*} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{k-1}+1}^{2^k} 2 * a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{k-1}+1}^{2^k} 2a_\nu \leq 2 * \sum_{j=2}^{\infty} a_j.$$

Hieraus folgt die Beh.

	$\nu=$	1	2	3	4	5	6	7	8	
*	k=1	$2a_{2^1}$								$=2^1 a_{2^1}$
	2	$2a_{2^2}$	$2a_{2^2}$	$2a_{2^2}$	$2a_{2^2}$					$=2^2 a_{2^2}$
	3	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$=2^3 a_{2^3}$

usw

„⇒" Auch hier genügt z.z., dass $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ beschränkt ist.

Für $n \in (2^{k-1}+1, 2^k] \cap \mathbb{N}$ $k \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \leq \sum_{\nu=1}^{2^k} a_\nu \leq \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=2^{j-1}+1}^{2^j} a_\nu + a_1 \leq \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=2^{j-1}+1}^{2^j} a_{2^{j-1}} + a_1 = \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} a_{2^{j-1}} + a_1 \leq \sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j} + 2a_1.$$

Wieder folgt die Beh.