2.3(1400) **Expotential-, Logarithmus- und Potenzfunktionen**

Bem:Stetige Verzinsung und natürliches Wachstum
Sei x der Zinssatz bzw Wachstumsrate /Jahr, K_0 =Ausgangskapital.
Jährl Verzinsung x, Kapital nach 1 Jahr $K_0(1+x)$
Monatl Verzinsung x/12, Kapital nach 1 Jahr $K_0(1+x/12)^{12}$
Tägl Verzinsung x/365, Kapital nach 1 Jahr $K_0(1+x/365)^{365}$
Allgemein $(1+x/n)^n$, $n\in\mathbb{N}$

#**S2.3.1**(1400) $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, $r_n, r\in\mathbb{Q}$, $r_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} r \Rightarrow a^{r_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} a^r$

*//**S2.1.2** #Bsp 11.)(1255)* $a>0, a_n=\sqrt[n]{a} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1$*#//*

*//#**S1.9.8**(1157)* $a\in R$, $a>0$, $r,s\in Q$, $r<s$: $a^r<a^s \Leftrightarrow a>1$, $a^r>a^s \Leftrightarrow a<1$.*//*

*//#**S1.9.6** Bem: 2.)(1155)* $a,b>0$, $r,s\in Q$: $a^r a^s=a^{r+s}$, $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$*//*

\# Bew: $a\neq 1$. $a^{1/n} \underbrace{\overbrace{\to}^{S2.1.2\ Bsp\ 11}}_{n\to\infty} 1$, $a^{-1/n}=(1/a)^{1/n} \underbrace{\overbrace{\to}^{S2.1.2\ Bsp\ 11}}_{n\to\infty} 1$

\# $r_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$: Wähle $\varepsilon>0$. $\exists$ $m\in\mathbb{N}$: $a^{1/m}, a^{-1/m}\in U_\varepsilon(1)$.

\# $\exists$ n_0: $-1/m< \underbrace{r_n}_{\to 0} <1/m$ $\forall$ $n\geq n_0$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.9.8}$ $a^{-1/m}< a^{r_n} <a^{1/m}$ $\forall$ $n\geq n_0$ $\Rightarrow$

\# $a^{r_n}\in U_\varepsilon(1)$ $\forall$ $n\geq n_0$ $\Rightarrow$ $a^{r_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1$

\# $r_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} r\neq 0$: $r_n-r \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \Rightarrow a^{r_n} \underbrace{=}_{S1.9.6 Bem 2.)} a^{r_n-r} a^r \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1*a^r=a^r$

#**S2.3.2**(1400) $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, $r_n,s_n\in\mathbb{Q}$, $\rho\in\mathbb{R}$, $r_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \rho$: $a^\rho := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$

*//**S1.5.15** #5.)(759)* $\rho\in R$, $\exists$ $(r_n)\in Q$, $r_n \nearrow$ oder $\searrow$: $\lim_{n\to\infty} r_n=\rho$*//*
*//#**S1.9.8** (1157)* $a\in R$, $a>0$, $r,s\in Q$, $r<s$: $a^r<a^s \Leftrightarrow a>1$, $a^r>a^s \Leftrightarrow a<1$.*//*
*//**S2.2.2** (1301)Vor:* $(a_n)\subset R$ *monoton und beschränkt Beh:* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$*//*

*//#**S1.9.6** Bem: 2.)(1155)* $a,b>0$, $r,s\in Q$: $a^r a^s=a^{r+s}$, $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$*//*

\# Bew: Sei $(s_n)\in\mathbb{Q}$, $s_n\nearrow$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.15\ 5.)}$ $\exists$ $\lim_{n\to\infty} s_n=\rho$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.9.8}$

\# a^{s_n} monoton und beschränkt durch a^ρ $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$ a^{s_n} konvergent

\# Sei $(r_n)\in\mathbb{Q}$, beliebig aber $\lim_{n\to\infty} r_n \underbrace{=}_{S1.5.15\ 5.)} \rho$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.9.6\ Bem\ 2.)}$ a^{r_n} =

$$\underbrace{a^{\overbrace{r_n-s_n}^{\to 0}}}_{\to 1} a^{s_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$$

\# Grenzwert der Folge ist immer vorhanden und hängt nicht von der
\# Wahl von (r_n) ab, sofern nur $r_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \rho$ $\Rightarrow$

\# $a^\rho := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ ($a>0$, $r_n\in\mathbb{Q}$, $\rho\in\mathbb{R}$, $r_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \rho$).

Bem: 1.) $0^\rho := 0 \ \forall\ \rho>0$

2.) $\rho,\sigma\in\mathbb{R}$, $\underbrace{r_n \to}_{n\to\infty} \rho$, $\underbrace{s_n \to}_{n\to\infty} \sigma$, $a^{r_n}\ a^{s_n} \underbrace{=}_{S1.9.6\,Bem2.)} a^{r_n+s_n} \underbrace{\overset{S2.3.2}{\Rightarrow}}_{n\to\infty} a^\rho\ a^\sigma = a^{\rho+\sigma}$

3.) $a^{r_n} / a^{s_n} = a^{r_n-r_s} \underbrace{\to}_{n\to\infty} a^\rho / a^\sigma = a^{\rho-\sigma}$

4.) $\rho\in\mathbb{R}$, $a<b$ d.h. $b/a>1$, $\underbrace{a^\rho<b^\rho}_{\rho>0}$, $\underbrace{a^\rho>b^\rho}_{\rho<0}$

//#***S1.9.8*** *(1157)* $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, $r,s\in\mathbb{Q}$, $r<s$: $a^r<a^s \Leftrightarrow a>1$, $a^r>a^s \Leftrightarrow a<1$.//

Bew: $\underbrace{r_n \to}_{n\to\infty} \rho$, $r, r_n\in\mathbb{Q}$,

$\rho>0$: Sei $0<r<\rho$. $r_n>r\ \forall\ n\ge n_0$: $r_n>r \underbrace{\Rightarrow}_{S1.9.8}$

$1<(b/a)^r<(b/a)^{r_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1<(b/a)^r\le (b/a)^\rho \Rightarrow a^\rho < b^\rho$

$\rho<0$: $-\rho>0 \Rightarrow 1/a^\rho < 1/b^\rho \Rightarrow a^\rho > b^\rho$

#**S2.3.3**(1401) $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, $x_n, x\in\mathbb{R}$!!!, $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x \Rightarrow a^{x_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} a^x$

#Bew : wie **S2.3.1.** Statt r_n, x_n ,denn $\exists\ m\in\mathbb{N}$: $a^{1/m}$, $a^{-1/m}\in U_\varepsilon(1)$.
$\exists\ n_0$: $-1/m< \underbrace{r_n}_{\to 0} <1/m\ \forall\ n\ge n_0$ usw

#S2.3.4(1401) $a,x\in\mathbb{R}$, $a>0$: $x\mapsto a^x>0\ \wedge\ \uparrow$ falls $a>1$, $\downarrow$ falls $0<a<1$
#Bew: $a>1$, $\rho<\sigma \Rightarrow 1=1^{\sigma-\rho} \underbrace{<}_{S2.3.2\,Bem\,4.)} a^{\sigma-\rho}=a^\sigma/a^\rho \Rightarrow a^\rho<a^\sigma$

$0<a<1$, $\rho<\sigma \Rightarrow 1/a^\rho=(1/a)^\rho<(1/a)^\sigma=1/a^\sigma \Rightarrow a^\rho>a^\sigma$

#S2.3.5(1401) $g>1$, $a>0$, $g^x=a \Leftrightarrow \exists_1\ x =: \underbrace{{}^g\log a}_{Definition} \in\mathbb{R}$

#Bew: $(1/g)^n = \underbrace{\overset{g>1}{\to}}_{n\to\infty} 0 \underbrace{\Rightarrow}_{a>0} \exists\ n_0\in\mathbb{N}$: $(1/g)^{n_0}\le a \ \wedge\ (1/g)^{n_0} \le 1/a \Rightarrow g^{-n_0} \le a \le g^{n_0}$.
$x_1:=-n_0$, $y_1:=n_0$, Intervall $[x_1,y_1]$,
Intervallschachtelung $[x_2=x_1,\ y_2=(x_1+y_1)/2]\ \wedge\ [x_2=(x_1+y_1)/2, y_2=y_1]$
mit $g^{x_2}\le a\le g^{y_2}$ usw $[x_n,y_n]$ mit $g^{x_n}\le a\le g^{y_n}$ für $n=1,2,3,\dots \Rightarrow$
$x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x$, $y_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.3} g^x\le a\le g^x \Rightarrow g^x=a \Rightarrow \exists_1\ x=({}^g\ a)\in\mathbb{R}$: $g^x=a$
Eindeutigkeit mit S2.3.4
#Bem: 1.) ${}^g\log 1=0$
2.) $x\in(0,+\infty)$, $x\mapsto {}^g\log x\ \uparrow$ aus 2.3.4 Fall $a>1$
3.) ${}^g\log a^\rho=\rho * {}^g\log a$
Bew: $a^\rho= g^{{}^g\log a^\rho}$, $g^{\rho\, {}^g\log a^\rho} = (g^{{}^g\log a^\rho})^\rho = a^\rho$

S2.3.6(1401) $x_n, x, g\in\mathbb{R}$, $x_n, x>0$, $g>1$, $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x \Rightarrow {}^g\log x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} {}^g\log x$

Bew: $x=1$: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)$: $\underbrace{g^{-\varepsilon}}_{<1} <x_n< \underbrace{g^{\varepsilon}}_{>1} \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.5} -\varepsilon<{}^g\log x_n<\varepsilon\ \forall\ n\ge n_0 \Rightarrow$

${}^g\log x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0={}^g\log 1$

sonst: $x_n/x \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1 \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.5} {}^g\log x_n - \log x \underbrace{=}_{S2.3.2\ Bem\ 2.)} {}^g\log(x_n/x) \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \Rightarrow$

$^g\log(x_n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} {}^g\log x$

S2.3.7(1402) $x_n, x, \rho \in R$, $x_n>0$, $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x>0$: $x_n^\rho \underbrace{\to}_{n\to\infty} x^\rho$

Bew: $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.6} \log x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \log x \Rightarrow \rho\log x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \rho\log x \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.5\ Bem\ 3.)} \log x_n^\rho \underbrace{\to}_{n\to\infty} \log x^\rho$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{g^{\log\ldots}} x_n^\rho = g^{\log x_n^\rho} \underbrace{\to}_{n\to\infty} g^{\log x^\rho} = x^\rho$$

S2.3.8(1402) Vor: $x\in R$, $x\neq 0$, $n>-x$, $x_n=(1+x/n)^n\ \forall\ n\in N$
Beh: $(x_n)\ \uparrow$

Bew: Ist $1+x/n>0 \Rightarrow n>-x$ und dann ist $\sqrt[n+1]{x_n}$ gleich dem geometrischen Mittel der n+1 Zahlen $a_k=1+x/n$, $1\le k\le n$ und $a_{n+1}=1$.

$$\sqrt[n+1]{\underbrace{x_n}_{>0}} = \underbrace{\sqrt[n+1]{\underbrace{\underbrace{(1+x/n)(1+x/n)\ldots(1+x/n)}_{n\ mal}*1}_{n+1\ Faktoren}}}_{geom.\ Mittel} =$$

$$\underbrace{\sqrt[n+1]{\underbrace{\underbrace{\left(\frac{n+x}{n}\right)\left(\frac{n+x}{n}\right)\ldots\left(\frac{n+x}{n}\right)}_{n\ mal}*1}_{n+1\ Faktoren}}}_{geom.\ Mittel} \underbrace{<}_{nicht\ alle\ Faktoren\ gleich}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}(n+1+x)}_{arithmetisches\ Mittel} \underbrace{=}_{1<k<n+1}$$

$$A(\underbrace{1+\frac{x}{n+1},\ldots 1+\frac{x}{n+1}}_{n+1\ mal}) \underbrace{=}_{A=G\ da\ alle\ Zahlen\ gleich} \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}} = \sqrt[n+1]{x_{n+1}} \Rightarrow$$

$x_n<x_{n+1} \Rightarrow$ Monotonie

Andere Formulierung aber für $x\in R$, $x\ge 0$, $a_n=(1+x/n)^n\ \forall\ n\in N$

//S1.5.6 (715) $x\in R$, $x\ge -1$, $n\in N$, $(1+x)^n\ge 1+nx$, $=\ \Leftrightarrow\ x=0$ oder $n=0$ oder $n=1$//

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1+x)^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}(n+x)^n} = \frac{(n+x)((n+1+x)n)^{n+1}}{n((n+1)(n+x))^{n+1}} = \frac{(n+x)(n^2+n+nx)^{n+1}}{n(n^2+n+nx+x)^{n+1}} =$$

$$\frac{(n+x)}{n}\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \underbrace{>=}_{x\ge 0>-1,\ S1.5.6} \frac{(n+x)}{n}\left(1-\frac{x}{(n+x)}\right)=1 \Rightarrow a_{n+1}\ge a_n$$

$$\#a_{n+1}-a_n=\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(\frac{n+1+x}{n+1}\right)^{n+1}-\left(\frac{n+x}{n}\right)^n=\frac{(n+1+x)^{n+1}-(n+x)^n}{(n+1)^{n+1}n^n}\neq 0 \Rightarrow \#$$

$\#a_{n+1}\neq a_n\# \Rightarrow a_{n+1}>a_n$ ↗

S2.3.9 (1403) $b_n:=(1+1/n)^{n+1}$ ↘

$$\text{Bew: } \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} = \frac{(n+1)((n+1)^2)^{n+1}}{(n+2)(n(n+2))^{n+1}} = \frac{(n+1)}{(n+2)}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} =$$

$$\frac{(n+1)}{(n+2)}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \frac{(n+1)}{(n+2)}\left(1+\frac{n}{n(n+2)}\right)^{n+1} \ge \frac{(n+1)}{(n+2)}\left(1+\frac{n(n+1)}{n(n+2)}\right) =$$

$$\left(\frac{(n+1)}{(n+2)}+\frac{(n+1)^2}{n(n+2)^2}\right) = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{(n+2)^2 n} = \frac{n(n+2)(n+1)+(n+1)^2}{(n+2)^2 n} =$$

$$\frac{(n+1)(n^2+2n+n+1)}{(n+2)^2 n} = \frac{n^3+4n^2+4n+1)}{n^3+4n^2+4n} > 1$$

Bem: a_n wie in S2.3.8 Andere Formulierung

Nun gilt $a_n(1) \le b_n \le b_1 = (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{1})^{1+1} = 4$ für $n \ge 1$ und mit $m=[x]+1$ auf Grund der Monotonie von $(a_n(m))$

$0 < a_n(x) \le (1+\frac{m}{n})^n \le (1+\frac{m}{nm})^{mn} = (a_n(1))^m \le 4^m$ für $n \ge 1$, kurz $0 < a_n(x) \le 4^m$ für $n \ge 1$

$\Rightarrow a_n(x)$ beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{(a_n)\ monoton}$ $(a_n(x))$ ist Cauchyfolge

S2.3.10(1403)$[(1+1/n)^n, (1+1/n)^{n+1}]$ ist für eine Intervallschachtelung mit $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1} =: e$, $n \in \mathbb{N}$ d.h. $2{,}37 < e < 3{,}16$

Bew:$a_n := (1+1/n)^n \nearrow$ nach S2.3.8

$a_n = (1+1/n)^n < (1+1/n)^{n+1} =: b_n$, $b_n \searrow$ nach S2.3.9

$I_n := [a_n, b_n] > I_{n+1}$ da $a_n \nearrow b_n \searrow$

$b_n - a_n = (1+1/n)^{n+1} - (1+1/n)^n = a_n((1+\frac{1}{n})-1) = a_n \frac{1}{n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \Rightarrow$

$a_n \to e$, $b_n \to e := \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1}$

$(1+1/n)^n < e < (1+1/n)^{n+1}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

Bsp:$n=3 \Rightarrow 64/27 = 2{,}37 < ...e.. < 256/81 = 3{,}16..$

S2.3.11(1403)$x \in \mathbb{R}$ & $x_n = (1+x/n)^n\ \forall\ n \in N$: (x_n) beschränkt

Bew: Falls $x \le 0$, ist $1+x/n \le 1$ und somit $x_n \le 1\ \forall\ n \ge n_0$ mit $|1+\overbrace{\frac{x}{n_0}}^{>-1 \Rightarrow n_0 > -x}| \le 1$.

Falls $x>0$, ist $(1+x/n)^n(1-x/n)^n = (1-x^2/n^2)^n < 1$ #für große n#.

Da $(1-x/n)^n$ für $n \ge n_0 > x$ streng monoton wächst, folgt für diese n, daß $(1-x/n)^n > (1-x/n_0)^{n_0}$.

$(1+x/n)^n < \frac{1}{(1-\frac{x}{n})^n} \le \frac{1}{(1-\frac{x}{n_0})^{n_0}}$.

Daraus folgt die Beschränktheit von $(1+x/n)^n$.

S2.3.12 (1404) $z\in\mathbb{C}$, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$ existiert.

*//**S2.2.2** (1301) Vor: $(a_n)\subset R$ monoton und beschränkt Beh: $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//*
*//**S2.2.5** (1307) $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in N: |z_n-z_m|<\varepsilon\ \forall\ n,m\geq n_1(\varepsilon) \Leftrightarrow$ konv//*
*//**S1.2.1** (406) Vor: K angeordnet, $a,b\in K$ 6.) $|a+b|\leq|a|+|b|$//*
*//**S2.3.8** (1402) $x\in R \wedge x\neq 0 \wedge n>-x \wedge x_n=(1+x/n)^n\ \forall\ n\in N$: $(x_n)\ \uparrow$//*
*//**S2.3.9** (1403) $b_n:=(1+1/n)^{n+1}\ \searrow$ //*

Bew: Sei zunächst statt z $x\in\mathbb{R}$, $x\geq 0$ baf. Wir betrachten die Folgen

$(a_n):=a_n(x):=(1+\frac{x}{n})^n$ und $b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$. ($a_n(1)=(1+\frac{1}{n})^n\leq b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$)

Wir zeigen: (a_n) ist ● monoton wachsend und ● ● beschränkt und damit nach S2.2.2 konvergent (deshalb nach S2.2.5 auch Cauchyfolge, wird unten benutzt) wie folgt

● $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.8}$ (a_n) $a_{n+1}>a_n\searrow$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.9}$ (b_n) $b_{n+1}<b_n\nearrow$

● ● Nun gilt $a_n(1)\leq b_n\leq b_1=(1+\frac{1}{n})^{n+1}=(1+\frac{1}{1})^{1+1}=4$ für $n\geq 1$ und mit $m=[x]+1$ auf Grund der Monotonie von $(a_n(m))$

$0<a_n(x)\leq(1+\frac{m}{n})^n\leq(1+\frac{m}{nm})^{mn}=(a_n(1))^m\leq 4^m$ für $n\geq 1$, kurz ● ● $0<a_n(x)\leq 4^m$ für $n\geq 1$

● ∧● ● $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$ existiert

Betrachte $z\in\mathbb{C}$ fest und definiere $z_n:=(1+z/n)^n$. Für $n\geq m$ gilt

$|z_n-z_m|=|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{z}{n}\right)^k-\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{z}{n}\right)^k|=$

$|\sum_{k=0}^{m}(\binom{n}{k}z^k\left(\frac{1}{n}\right)^k+\sum_{k=m+1}^{n}(\binom{n}{k}z^k\left(\frac{1}{n}\right)^k-\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}z^k\left(\frac{1}{n}\right)^k|=$

$|\sum_{k=0}^{m}(\binom{n}{k}n^{-k}-\binom{m}{k}m^{-k})z^k+\sum_{k=m+1}^{n}\binom{n}{k}(z/n)^k|=:|\sum_{k=0}^{n}\kappa_k z^k|\underbrace{\leq}_{S1.2.1\ 6.)}$

$\sum_{k=0}^{n}\kappa_k|z|^k=(1+|z|/n)^n-(1+|z|/m)^m$. #Cauchyfolgen

Man beachte, dass die κ_k nicht negativ sind, so ist für $0\leq k\leq m$:
$\kappa_k=\{[n(n-1)\ldots(n-(k-1)n^{-k})]-[m(m-1)\ldots(m-(k-1)]m^{-k}\}/k!=$
$\{1(1-1/n)\ldots(1-(k-1)/n)-1(1-1/m)\ldots(1-(k-1)/m\}/k!\geq 0$
$(1(1-1/n)\ldots(1-(k-1)/n))>(1(1-1/m)\ldots(1-(k-1)/m)$
Da $|z|\geq 0$, wissen wir nach S2.3.9 Bem, dass $(1+|z|/n)^n$ eine monoton wachsende Cauchyfolge ist und somit ist auch (z_n) eine Cauchyfolge und mit S2.2.5 (Cauchykrit) folgt die Beh

S2.3.13 (1404) $|(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n-(1+z)|\leq|z|^2(1+\frac{|z|}{n-2})^{n-2}\leq|z|^2 4^{[|z|]+1}\ \forall\ n\geq 3, z\in\mathbb{C}$

*//**S1.7.4** (906) $\alpha\in C \wedge n,m,k\in N_0$, $j\in N$: 6.) $(1+z)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k$//*

Bew: $|(1+\frac{z}{n})^n-(1+z)|\underbrace{=}_{S1.7.4}|1+\frac{nz}{n}+\frac{n(n-1)z^2}{2n^2}+\ldots-(1+z)|=|\frac{n(n-1)z^2}{2n^2}+\ldots|=$

$$|\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!\,n^k}z^k| \overbrace{\underbrace{<=}_{\ell=k-2}}^{!} |z|^2\sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{(n-2)\ldots(n-\ell-2+1)}{(\ell+2)!}\left(\frac{|z|}{n}\right)^{\ell} \le$$

$$|z|^2\sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{(n-2)\ldots(n-\ell-2+1)}{\ell!}\left(\frac{|z|}{n-2}\right)^{\ell} \le |z|^2\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{n-2}{\ell}\left(\frac{|z|}{n-2}\right)^{\ell} \underset{S1.7.4}{=}$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{|z|}{n-2}\right)}_{a_{n-2}(|z|)\le 4^{m_{n-2}}} |z|^2 \le |z|^2 4^{[|z|]+1}. \qquad \le 4^m \text{ siehe Seite 1403 } \bullet\bullet$$

S2.3.14(1405) $\forall\ (w_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ w_n\in\mathbb{C}$ gilt $(1+\frac{w_n}{n})^n \underset{n\to\infty}{\to} 1$

//***S1.6.2***(802) *Vor.* $z_1, z_2 \in C$. *3.)* $|z_1 \pm z_2| \ge ||z_1|-|z_2|| \ge |z_1|-|z_2|$//

Bew: $|\left(1+\frac{w_n}{n}\right)^n -1|-|w_n| \underset{S1.6.2}{<=} |\left(1+\frac{w_n}{n}\right)^n -(1+w_n)| \le |w_n|^2\left(1+\frac{|w_n|}{n-2}\right)^{n-2} \le |w_n|^2 a_{n-2}(1)$

für n genügend groß (damit $|w_n|\le 1$ weil w_n Nullfolge)

$|\left(1+\frac{w_n}{n}\right)^n -1| \le |w_n| + \underset{siehe\ S2.3.12}{4}|w_n|^2 \le 5|w_n|$ für genügend große n gilt

und $|w_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Andere Formulierung $(z_n),\ z_n\in\mathbb{C}$

//***S1.7.2*** *(903)* $a,b\in C,\ n\in N_0$*:1.)* $\sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} n+1, & a=1 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a\ne 1\end{cases}$ //

$z_n \to 0 \Rightarrow \exists\ |z_n|\le k\ \ \forall\ n\in\mathbb{N},\ |z_n|\le 1/2=\varepsilon_0\ \ \forall\ n>N(\varepsilon_0)$

$(1+\frac{z_n}{n})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\frac{z_n}{n})^k \Rightarrow \underbrace{\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n-1}_{=:c_n} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(\frac{z_n}{n})^k$

$$\underset{\binom{k}{n}\le\frac{n^k}{k!}}{\Rightarrow}\binom{k}{n}\ |c_n| \le \underbrace{\sum_{k=1}^{N}\frac{|z_n|^k}{k!}}_{\to 0(n\to\infty)} + \sum_{k=N+1}^{n}\frac{|z_n|^k}{k!} = \underbrace{\sum_{k=1}^{N}\frac{|z_n|^k}{k!}}_{\to 0(n\to\infty)} + |z_n|\sum_{k=N+1}^{n}\frac{|z_n|^{k-1}}{k!} \le$$

(N:endlich viele Summanden)

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{|z_n|^k}{k!} + |z_n|\sum_{k=N+1}^{n}\underbrace{(1/2)^{k-1}}_{>\frac{(1/2)^{k-1}}{k!}} \le \sum_{k=1}^{N}\frac{|z_n|^k}{k!} + |z_n|\sum_{k=1}^{n}(1/2)^{k-1} \underset{S1.7.2}{=}$$

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{|z_n|^k}{k!} + |z_n|\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < \sum_{k=1}^{N}\frac{|z_n|^k}{k!} + 2|z_n|$$

$$|c_n| < \underset{a_n\to 0\text{ für } n\to\infty}{0} + 2|z_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

S2.3.15(1406) $\forall\ x\in R\ \exists \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n=\lim_{n\to\infty}(1-x/n)^{-n}=:\exp(x)$

siehe auch S2.3.18 5.)

*//**S2.3.14** (1405) Für alle Nullfolgen (w_n) $w_n\in C$ gilt $(1+\frac{w_n}{n})^n\to 1\ (n\to\infty)$//*

*//**S2.3.12** (1404) $z\in C$, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$ existiert.//*

*//**S2.1.2** (1250) $a,b,(a_n),(b_n)\in R$, konvergent $a_n\overset{n\to\infty}{\to}a, b_n\overset{n\to\infty}{\to}b$//*

//7.) $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab$//

//8.) $\forall\ n\geq n_1$ und $(\frac{a_n}{b_n})\to(\frac{a}{b})\ (n\to\infty)$, $n\geq n_1$//

// Bem:Seien alle $x_n\neq 0$, und gelte $\lim_{n\to\infty}x_n=x\neq 0$. Dann ist auch die

//Folge// // der Kehrwerte $(1/x_n)$ konvergent, und $\lim_{n\to\infty}1/x_n=1/x$//

#Bew: $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.12}\ \exists\lim_{n\to\infty}((1+x/n)^n)=a\ \wedge\ \exists\lim_{n\to\infty}((1-x/n)^n)=b$

#

$\lim_{n\to\infty}[(1+x/n)^n(1-x/n)^n]=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})^n=(1-\underbrace{\frac{x^2}{n}}_{a_n\to 0}\cdot\frac{1}{n})^n\ \overbrace{\underbrace{\to}_{S2.3.14}}^{n\to\infty}\ 1$

$\lim_{n\to\infty}[(1+x/n)^n(1-x/n)^n]\underbrace{=}_{S2.1.2}\lim_{n\to\infty}((1+x/n)^n)\lim_{n\to\infty}(1-x/n)^n)=1$

$\lim_{n\to\infty}((1+x/n)^n)=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n}\underbrace{=}_{S2.1.2\ 8.)Bem}\lim_{n\to\infty}(1-x/n)^{-n})$

*//**S2.2.2** (1301) Vor: $(a_n)\subset R$ monoton und beschränkt Beh: $\exists\lim_{n\to\infty}a_n$//*

Bew: $(1+x/n)^n(1-x/n)^n=(1-\frac{x^2}{n^2})^n=(1-\underbrace{\frac{x^2}{n}}_{a_n\to 0}\cdot\frac{1}{n})^n\ \overbrace{\underbrace{\to}_{S2.3.14}}^{n\to\infty}\ 1$

- $x\geq 0\ \Rightarrow\ \exists\lim_{n\to\infty}[(1+x/n)^n$, $m:=[x]+1\ (\Rightarrow\ x\leq 0)$

  $(1+x/n)^n\leq(1+m/n)^n)\leq(1+\frac{1}{m*n})^{m*n}\leq(1+\frac{1}{n})^{m*n}\leq(\underbrace{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}_{b_n})^m\leq b_1^m=4^m\ \Rightarrow$

  $(1+x/n)^n\leq 4^{[x]+1}\ \underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}\ \exists\ \exp(x):=\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n\ \forall\ x\geq 0$

•• $x<0\ \Rightarrow\ (1+x/n)^n\leq\underbrace{=}_{-x>0}\frac{(1-\frac{x^2}{n^2})^n}{(1-\frac{x}{n})^n}\underbrace{\to}_{n\to\infty}\frac{1}{\exp(-x)}$

••• $x\geq 0\ \Rightarrow\ (1+x/n)^n\geq 1\underbrace{\to}_{n\to\infty}\exp(x)\geq 1$, $\exp(x)=\frac{1}{\exp(-x)}$, $\exp(x)*\exp(-x)=1$

S2.3.16(1407) $x_n \in \mathbb{R}$, $(x_n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$, $x_n \neq 0 \wedge x_n > -1$ #für große n#: $\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} \to e$

*//**S2.1.3** (1255)* $(a_n),(b_n),(c_n)$ *Folgen aus R:* $a_n \to a, b_n \to b, (n\to\infty)$ *und* $\alpha \in R$*//*
// 3.) $a_n \le c_n \le b_n$ *für fast alle* $n \in N$ *und* $a=b \Rightarrow c_n \to a$ $(n\to\infty)$ $a_n \to a$, $b_n \to b=a$*//*
// *Bem:* $a_n < \alpha$ *für* ∞ *viele* $n \in N \not\Rightarrow a < \alpha$ *sondern* $a \le \alpha$ *//*
*//**S2.3.15** (1406)* $\forall\, x \in R\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} (1+x/n)^n = \lim\limits_{n\to\infty} (1-x/n)^{-n}$*//*

Bew: $x_n > 0$, $\exists$ m: $\forall$ $n \ge m$ ist $x_n \le 1$, also $\frac{1}{x_n} \ge 1$. Zu diesen n gibt es

$k_n \in \mathbb{N}$ mit $k_n \le \frac{1}{x_n} < k_n+1 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{k_n+1}}_{Nullf} < x_n \le \underbrace{\frac{1}{k_n}}_{Nullf} \Rightarrow$

(Rückführung von $\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}}$ auf $(1+1/n)^n$)

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < \left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} < \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}}_{\to e} \underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{1}{k_n+1}}_{Nullf}\right)^{-1}}_{\to 1} < \left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} < \underbrace{\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}}_{\to e} \underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{1}{k_n}}_{Nullf}\right)}_{\to 1} \underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.3\ 3.)}$$

$$\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} \to e$$

$x_n < 0$, analog???

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}}_{\to 1/e} < \left(1-x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} < \underbrace{\left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}}_{\to 1/e} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.3\ 3.)} \left(1-x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} \to 1/e \Rightarrow$$

$$\left(1-x_n\right)^{-\frac{1}{x_n}} \to e$$

n

#$x_n < 0$, analog

#$\exists$ m: $\forall$ $n \ge m$ ist $0 > x_n \ge -1 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \le -1 \Rightarrow -\frac{1}{x_n} \ge 1$. Zu diesen n gibt es

\# $k_n \in \mathbb{N}$ mit $k_n \le -\frac{1}{x_n} < (k_n+1) \Rightarrow -k_n \ge \frac{1}{x_n} > -(k_n+1) \Rightarrow -\underbrace{\frac{1}{k_n+1}}_{Nullf} > x_n \ge -\underbrace{\frac{1}{k_n}}_{Nullf} \Rightarrow$

\# $$\left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{-(k_n+1)} < \left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} < \left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{-k_n} \Rightarrow$$

\# $$\left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{-k_n} \left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{-1} < \left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} < \left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{-(k_n+1)} \left(1-\frac{1}{k_n+1}\right) \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.15}$$

\# $$\underbrace{\left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{-k_n}}_{\underset{k_n\to\infty}{=} \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \underset{k_n\to\infty}{\to} e} \underbrace{\left(1-\frac{1}{k_n}\right)^{-1}}_{\underset{k_n\to\infty}{\to} 1} < \left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} < \underbrace{\left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)^{-(k_n+1)}}_{\underset{(k_n+1)\to\infty}{=} \left(1+\frac{1}{k_{n+1}}\right)^{k_n+1} \to e} \underbrace{\left(1-\frac{1}{k_n+1}\right)}_{\underset{k_n+1\to\infty}{\to} 1} \underbrace{\to}_{S2.3.15} e$$

$\Rightarrow$ Beh, falls x_n fast immer positiv oder fast immer negativ.
Enthält (x_n) ∞ viele positive und ∞ viele negative Glieder,
Zerlegung von (x_n) in 2 Teilfolgen (x'_n) (x''_n), von denen die erste

nur positive, die zweite nur negative Glieder enthält. Nach dem bisher Bewiesenen gilt

$$\left(1+x_n'\right)^{\frac{1}{x_n'}} \to e,\quad \left(1+x_n''\right)^{\frac{1}{x_n''}} \to e \quad \underbrace{\Rightarrow}_{*} \quad \left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} \to e$$

Für vorgegebenes $\varepsilon>0$ liegen fast alle $\left(1+x_n'\right)^{\frac{1}{x_n'}}$ und fast alle $\left(1+x_n''\right)^{\frac{1}{x_n''}}$ in $U_\varepsilon(e)$ $\Rightarrow$ Es liegen fast alle $\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}}$ in $U_\varepsilon(e)$.

S2.3.17(1408) $(1+x/n)^n \underbrace{\to}_{n\to\infty} e^x\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

*//**2.3.16** (1407)* $(x_n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0,\ x_n\neq 0 \wedge x_n>-1,\ x_n\in R$: $\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} \underbrace{\to}_{n\to\infty} e$*//*

Bew: $x\neq 0$. S2.3.16 $\Rightarrow$ $(1+x/n)^{n/x}\to e$ $\Rightarrow$ $(1+x/n)^n=\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}\right]^x \underbrace{\to}_{siehe```*} e^x$.

* Vor $x_n>0$, $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x$. Beh $x_n^\rho \to x^\rho$, $\rho\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $\rho\log x_n\to\rho\log x$ $\Rightarrow$ $\log x_n^\rho \to \log x^\rho$ $\Rightarrow$ $x_n^\rho = e^{\log x_n^\rho} \to e^{\log x^\rho} = x^\rho$.

Andere Formulierung:

*//**S2.3.7** (1402)* $x_n, x, \rho\in R$, $x_n>0$, $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x>0$: $x_n^\rho \underbrace{\to}_{n\to\infty} x^\rho$ *//*

$\#(1+\underbrace{x/n}_{n\to 0})^{n/x} \overbrace{\underbrace{\to}_{n\to\infty}}^{S2.3.16} e \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.7} (1+x/n)^n=\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}\right]^x \underbrace{\to}_{n\to\infty} e^x$.

D2.3.1(1408)

(.) Die relle Zahl $e:=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ heißt die Eulersche Zahl

(..) Für $x\in\mathbb{R}$ definieren wir die reelle Expotentialfunktion $\exp_{|\mathbb{R}}(x))=e^x \underbrace{=}_{*} \lim_{n\to\infty}((1+x/n)^n)$ einer reellen Veränderlichen durch

$\exp: \mathbb{R} \underbrace{\to}_{S2.3.11\ 1.)} \mathbb{R}_+$, $x \underset{Abbildung}{\to} \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$ $(\exp(x)=\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n)$

(..) Für $z\in\mathbb{C}$ $(x\in\mathbb{R})$ definieren wir die komplexe Expotentialfunktion $\exp(z)=e^z \underbrace{=}_{**} \lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n$ einer komplexen Veränderlichen durch

$\exp: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z \underset{Abbildung}{\to} \lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n$

* Bew für $x\in\mathbb{Q}$ ohne S2.3.15 in S2.3.16 6.)

** Bew siehe S3.6.1 $\lim_{n\to\infty}((1+z/n)^n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ und S5.3.1 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

Bem: e=2,7182818...irrational, transzendent

S2.3.18(1409)Eigenschaften Expotentialfunktion

Für $z,w\in\mathbb{C}$, $x\in\mathbb{R}$ gilt

1.) (.) $\exp(0)=e^0=1$

(..) $\exp(x)>0$

*//#**S1.9.7** (1157)a,b∈R, a,b>0 r∈Q. (.) r>0, a<b ⇔ $a^r<b^r$ //*

#Bew: $(1+\underbrace{\frac{x}{n}}_{<-1 \text{ für } n>-x \text{ falls } x<-1})^n = (\underbrace{1+\frac{x}{n}}_{>0\ \forall\ x\in R})^n \underbrace{\geq}_{S1.9.7} 0^n=0$

2.) $e^z\neq 0\ \ \forall\ z\in\mathbb{C}$: $e^{-z}=1/e^z$

Bew siehe 3.) Formulierung für komplexe Variable $e^z e^w=e^{z+w}$

3.) $\exp(x)\exp(y)=\exp(x+y)\ \ \forall\ x,y\in\mathbb{R}$ bzw

$\exp(z)\exp(w)=\exp(z+w)$, auch $e^z e^w=e^{z+w}\ \forall\ z,w\in\mathbb{C}$

Additionstheorem oder Funktionalgleichung

*//**S2.3.14**(1405) Für alle Nullfolgen (w_n) $w_n\in\mathbb{C}$ gilt $(1+\frac{w_n}{n})^n\to 1\ (n\to\infty)$ //*

Bew: $$\frac{\exp(x)\exp(y)}{\exp(x+y)} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\underbrace{\frac{xy}{(n+x+y)}}_{a_{n\to 0}}\right)^n \underbrace{=}_{2.3.14} 1$$

Formulierung für komplexe Variable $e^z e^w=e^{z+w}$

Bew für 2.) und 3.):

$(1+\frac{z+w}{n})^n\neq 0$ außer für höchstens ein $n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{(1+z/n)^n(1+w/n)^n}{(1+\frac{z+w}{n})^n} = \left(\frac{1+\frac{z+w}{n}+\frac{z*w}{n^2}}{(1+\frac{z+w}{n})}\right)^n =$$

$$\left(1+\frac{zwn}{n^2(n+z+w)}\right)^n = \left(1+\frac{zw}{n(n+z+w)}\right)^n \underbrace{\to}_{S2.3.14} 1 \underbrace{\Rightarrow}_{Grenzwertr} e^z e^w=1*e^{z+w}$$

$\frac{zw}{n+z+w} =: w_n\to 0$ speziell $z=-w$, $e^z e^{-w}=e^{w-w}=e^0=1$

insbesondere $e^w\neq 0$

4.) $|e^z-(1+z)| \le |z|^2 e^{|z|}\ \forall\ z\in \mathbb{C}$

Bew: $|(1+z/n)^n-(1+z)| \underbrace{\le}_{S2.3.13} |z|^2(1+\frac{|z|}{n-2})^{n-2}$, Grenzwertregeln, Beh

Andere Formulierung

$|(1+z/n)^n-1-z| \le 1/2|z|^2 e^{|z|}$

Vorbetrachtung: $n \ge\le m$, $z\in \mathbb{C}$

$*\quad \binom{n}{\nu}\frac{1}{n^\nu}=\frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{\nu!\,n^\nu}=\frac{1}{\nu!}(1-1/n)(1-2/n)\ldots(1-\frac{\nu-1}{n})>$

$\frac{1}{\nu!}(1-1/m)(1-2/m)\ldots(1-\frac{\nu-1}{m})$

$** \quad \binom{n}{\nu+2}=\frac{n(n-1)(n-2)..(n-(\nu+2)+1)}{\nu!(\nu+1)(\nu+2)} \le$

$\frac{n(n-1)}{2}\underbrace{\left(\frac{(n-2)\ldots(n-2-\nu+1)}{\nu!}\right)}_{\binom{n-2}{\nu}}$

*//#**S2.3.12** (1404) $z\in C$, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$ existiert//*

*//**S2.2.5** (1307) komplexe Folge ist <u>genau dann</u> konvergent, wenn sie//*
//das Cauchy Kriterium erfüllt: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in N: |z_n-z_m|<\varepsilon\ \forall\ n,m\ge n_1(\varepsilon)$.//

Anfang Bew

$\forall\ n>m\in \mathbb{N}$ (siehe auch 2.3.13):

$|(1+z/n)^n-(1+z/m)^m| = |\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\left(\frac{z}{n}\right)^\nu-\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu}\left(\frac{z}{m}\right)^\nu| =$

$|\underbrace{\binom{n}{0}}_{1}\underbrace{\left(\frac{z}{n}\right)^0}_{1}+\underbrace{\underbrace{\binom{n}{1}}_{n}\left(\frac{z}{n}\right)}_{z^1}-\binom{m}{0}\left(\frac{z}{m}\right)^0-\underbrace{\underbrace{\binom{m}{1}}_{m}\left(\frac{z}{m}\right)}_{z^1}+\sum_{\nu=2}^{n}\binom{n}{\nu}\left(\frac{z}{n}\right)^\nu-\sum_{\nu=2}^{m}\binom{m}{\nu}\left(\frac{z}{m}\right)^\nu| =$

$|\sum_{\nu=2}^{m}\left(\binom{n}{\nu}\frac{z^\nu}{n^\nu}-\binom{m}{\nu}\frac{z^\nu}{m^\nu}\right)+\sum_{\nu=m+1}^{n}\binom{n}{\nu}\left(\frac{z}{n}\right)^\nu| \le$

$\overset{*}{\sum_{\nu=2}^{m}}\left(\underbrace{\binom{n}{\nu}\frac{1}{n^\nu}-\binom{m}{\nu}\frac{1}{m^\nu}}_{>0 \text{ da } n>m}\right)|z|^\nu+\sum_{\nu=m+1}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{|z|^\nu}{n^\nu}=$

$(1+\frac{|z|}{n})^n-(1+\frac{|z|}{m})^m \underbrace{<}_{S2.3.12,\ 2.2.5} \varepsilon\ \forall\ n<m\le n_0(\varepsilon) \Rightarrow$

$|(1+z/n)^n-\underbrace{(1+z)}_{m=1}| \underbrace{<=}_{n=0,1\ Diff\ 0} \sum_{\nu=2}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{|z|^\nu}{n^\nu}=\sum_{\nu=0}^{n-2}\binom{n}{\nu+2}\frac{|z|^{\nu+2}}{n^{\nu+2}}=$

$\frac{|z|^2}{n^2}\sum_{\nu=0}^{n-2}\binom{n}{\nu+2}\frac{|z|^\nu}{n^\nu}$

$\sum_{\nu=2}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{|z|^\nu}{n^\nu}\underbrace{<=}_{**}\frac{|z|^2}{2}\frac{n(n-1)}{n^2}\sum_{\nu=0}^{n-2}\binom{n-2}{\nu}\frac{|z|^\nu}{n^\nu}\le\frac{|z|^2}{2}\frac{n(n-1)}{n^2}\sum_{\nu=0}^{n-2}\binom{n-2}{\nu}\frac{|z|^\nu}{(n-2)^\nu}=$

$\frac{|z|^2}{2}\underbrace{\frac{n(n-1)}{n^2}}_{<=1}\underbrace{\left(1+\frac{|z|}{n-2}\right)^{n-2}}_{<=e^{|z|}} \le 1/2|z|^2 e^{|z|}\quad \forall\ n>2$

5.) $\forall\ x\in\mathbb{R}\ \exists\ \exp(x)=\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n=\lim_{n\to\infty}(1-x/n)^{-n}=\dfrac{1}{\exp(-x)}$, $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$

Siehe auch **S2.3.15**, ~~jetzt u.a.~~ Einbeziehung Def exp

*//**S2.3.14** (1405) Für alle Nullfolgen (w_n) $w_n\in\mathbb{C}$ gilt $(1+\frac{w_n}{n})^n\to 1\ (n\to\infty)$ //*

*//**S2.3.9** (1403) $b_n:=(1+1/n)^{n+1}$ ↘ //*

*//**S2.2.2** (1301) Vor: $(a_n)\subset\mathbb{R}$ monoton und beschränkt Beh: $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$ //*

*//**S2.3.8** (1402) $x\in\mathbb{R}\ \wedge\ x\neq 0\ \wedge\ n>-x\ \wedge\ x_n=(1+x/n)^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$: $(x_n)\uparrow$ //*

Bew: $(1+x/n)^n(1-x/n)^n=(1-\frac{x^2}{n^2})^n=(1-\underbrace{\frac{x^2}{n}}_{a_n\to 0}\cdot\frac{1}{n})^n \underbrace{\overset{n\to\infty}{\to}}_{S2.3.14} 1$

$x\geq 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$, m: $\underbrace{=}_{x\leq m} \underbrace{[x]}_{\text{grö}\text{stes Ganzes}} +1 \in\mathbb{N}$

$(1+x/n)^n \leq (1+m/n)^n \underbrace{<=}_{S2.3.8} (1+\frac{m}{mn})^{mn}=(1+\frac{1}{n})^{mn}\leq \left(\underbrace{(\overbrace{1+\frac{1}{n}}^{>1})^{n+1}}_{b_n}\right)^m \underbrace{<=}_{S2.3.9} b_1^m \underbrace{=}_{b_1=(1+\frac{1}{1})^{1+1}}$

$4^m \Rightarrow (1+x/n)^n \leq 4^{[x]+1} \underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2} \exists\ \exp(x):=\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n\ \forall\ x\geq 0$

Andere Formulierung siehe S2.3.17

$x<0 \Rightarrow (1+x/n)^n=\dfrac{(1-\frac{x^2}{n^2})^n}{(1-\frac{x}{n})^n}=\dfrac{(1-\overbrace{\frac{x^2}{n}}^{a_n\to 0}*\frac{1}{n})^n}{(1-\frac{x}{n})^n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \dfrac{1}{\exp(-x)}$

$x\geq 0 \Rightarrow (1+x/n)^n\geq 1>0 \Rightarrow \exp(x)\geq 1$

$\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n=\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n}=\exp(x)=\dfrac{1}{\exp(-x)} \Rightarrow \exp(x)\exp(-x)=1$

6.) (.) $\exp(m)=e^m\ \forall\ m\in\mathbb{Z}$, (..) $\exp(1/k)=e^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{e}\ \forall\ k\in\mathbb{N}$,

(...) $\exp(r)=e^r\ \forall\ r\in\mathbb{Q}$ (siehe auch A2.3.5)

Bem:siehe jedoch *//S2.3.17(1408)* $(1+x/n)^n\to e^x\ \forall\ x\in\mathbb{R}$*.//*

*//**S2.2.1** (1301)* $z_n \underset{n\to\infty}{\to} z$ *Beh:Jede Teilfolge* (z_{ν_n}) *von* (z_n) $z_{\nu_n}\to z\,(n\to\infty)$*//*

*//**S2.1.2** (1250)* $z,\ (z_n)\in\mathbb{C},\ z_n \overset{n\to\infty}{\to} z$, *9.)* $z_n^k\to z^k$

*//**S2.2.2** (1301)Vor:* $(a_n)\subset R$ *monoton und beschränkt Beh:* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$*//*

*//**S2.3.6**(1401)* $x\in R\wedge x\neq 0\wedge n>-x\wedge x_n=(1+x/n)^n\ \forall\ n\in N$: $(x_n)\uparrow$ *//*

*//**S2.3.9**(1403)* $x\in R\wedge x_n=(1+x/n)^n\ \forall\ n\in N$: (x_n) *beschränkt//*

Bew: (.) $\exp(m)=\lim_{n\to\infty}(1+m/n)^n \underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.1} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{mn}\right)^{mn}=$

$\left(\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n\right)^m=e^m$,

(..) $(\exp(1/k))^k=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1/k}{n}\right)^n\right)^k \underbrace{=}_{S2.2.1} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn} \underbrace{=}_{S2.2.1+(\nu_n=kn)} e \Rightarrow$

$\exp(1/k)=\sqrt[k]{e}=e^{\frac{1}{k}}$

(...) $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},\ q\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{Z} \Rightarrow \exp(p/q)=e^{\frac{p}{q}}=\left(e^{\frac{1}{q}}\right)^p=(e^p)^{\frac{1}{q}}=\exp(x)=e^x$

Andere Formulierung:

*//**S2.3.18**(1409)Eigenschaften Expotentialfunktion//*

//   Für $z,w\in\mathbb{C},\ x\in\mathbb{R}$ *gilt//*

//   5.)(1412) $\forall\ x\in\mathbb{R}\ \exists\ \exp(x)=\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n=\lim_{n\to\infty}(1-x/n)^{-n}=\frac{1}{\exp(-x)}$ *//*

Wir zeigen zuerst $(\exp(x))^n=\exp(nx)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ und $\forall\ n\in\mathbb{Z}$:

Sei $x\in\mathbb{R}$ fest

(.) $n\geq 0$...Induktion

$n=0$: $(\exp(x))^0=1=\exp(0)=\exp(0\cdot x)$

$n\to n+1$: $(\exp(x))^{n+1}=(\exp(x))^n\exp(x) \underbrace{=}_{IndHyp} \exp(nx)\exp(x)$

$\underbrace{=}_{S2.3.16\ 3.)} \exp(nx+x)=\exp((n+1)x)$.

(..) $n<0$ $(\exp(x))^n \underbrace{=}_{PotenzR} \frac{1}{(\exp(x))^{-n}} \underbrace{=}_{-n>0} \frac{1}{\exp((-n)x)} \underbrace{=}_{S2.3.18\ 5.)\ bzw\ 2.3.15} \frac{1}{\exp((-(nx)}$

$\underbrace{=}_{S2.3.18\ 5.)} \exp(nx)$

$\exp(m)=\exp(1*m)=e^m\ \forall\ m\in\mathbb{N}_0$ und $\exp(1/k)=\exp(1*\frac{1}{k})=e^{\frac{1}{k}}\ \forall\ k\in\mathbb{N}$.

Sei $m\in\mathbb{Z}$ mit $m<0$: $\exp(m) \underbrace{=}_{S2.3.15} \frac{1}{\exp(-m)}=\frac{1}{e^{-m}}=e^m$.

Sei $r\in\mathbb{Q}$ beliebig $\Rightarrow\ \exists\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ r=p/q \Rightarrow$

$\exp(r)=\exp(p\cdot 1/q)=[\exp(1/q]^p \underbrace{=}_{S2.3.6\,5.)} [e^{1/q}]^p=(e^p)^{\frac{1}{q}}=e^{\frac{p}{q}}=e^r$.

7.) $1+x\le\exp(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R},\ \exp(x)\le\frac{1}{1-x}\ \forall\ x<1$

*//**S1.5.6** (715) $x\in R,\ x\ge -1,\ n\in N, (1+x)^n\ge 1+nx,\ =\ \Leftrightarrow\ x=0$ oder $n=0$ oder $n=1$//*

*//**S2.1.3** (1255) $\alpha, (a_n)\in\mathbb{R}$: $a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a$ 1.) $a_n\le\alpha\ (\ge\alpha)$ für ∞ viele $n\in N\ \Rightarrow$*

// $a\le\alpha\ (a\ge\alpha)$//

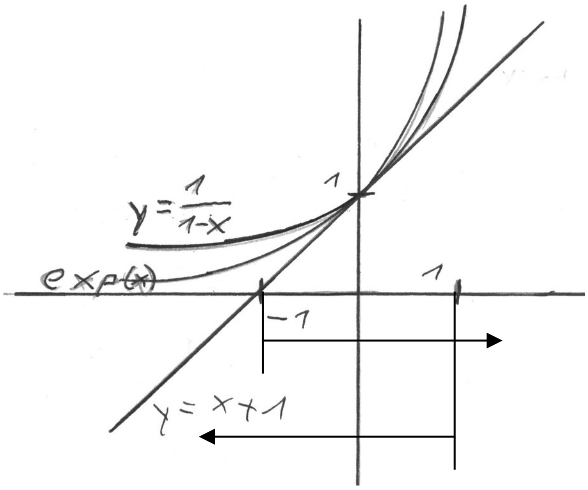
*//**S2.3.8**(1402)* $x\in\mathbb{R}\ \wedge\ x\ne 0\ \wedge\ n>-x\ \wedge\ x_n=(1+x/n)^n\ \forall\ n\in N$: $(x_n)\uparrow$

*//**S1.5.4** (705) $\forall\ a\in R\ \exists\ n\in N: a<n$//*

Bew: $x\ge 0$: S2.3.6 $1+x\le(1+x/2)^2\le....\le(1+x/n)^n<\exp(x)\ \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.6}$

$1+x\le(1+\underbrace{x/n}_{\xi\ge -1})^n\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ \underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.3}\ 1+x\le\exp(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

$\xi=\frac{x}{n_0}\ge -1\ \Rightarrow\ x\ge -n_0\ \Rightarrow\ -x\le n_0\ \Rightarrow\ -x\le n_0<n\ \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.4}$ möglich $\forall\ x\in\mathbb{R}$



$x<1$: x durch $-x$ ersetzt $\Rightarrow\ 1-x\le\exp(-x)\ \underbrace{=}_{2.3.18\ 5.)}\ \frac{1}{\exp(x)}\ \Rightarrow$

$0\ \underbrace{<=}_{2.3.18\ 1.)(..)}\ \exp(x)\le\frac{1}{1-x}\ \Rightarrow\ \exp(x)\le\frac{1}{1-x}\ \forall\ x\ \underbrace{<}_{1.(..)}\ 1$

8.) $x<y\ \Leftrightarrow\ \exp(x)<\exp(y)$ (strenge Monotonie)

Bew: $x\le y\ \Leftrightarrow\ \exp(y)=\underbrace{\exp(y-x)}_{y-x>0\underbrace{\Rightarrow}_{7.)}>1}\exp(x)>\exp(x)$

Andere Formulierung:

$e^x<e^y\ \Leftrightarrow\ x<y$

Bew: $e^y=\underbrace{e^{y-x}}_{>1\Leftrightarrow y>x}e^x\ \Rightarrow\ e^y>e^x\ \Leftrightarrow\ y>x$

9.) $\overline{e^z}=e^{\bar z}$, $|e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}$, $|e^z|=1\ \Leftrightarrow\ \mathrm{Re}(z)=0$

Bew: $\underbrace{\overline{(1+z/n)^n}}_{\overline{e^z}}=\underbrace{\left(1+\frac{\bar z}{n}\right)^n}_{e^{\bar z}}$

$|e^z|^2=e^z\,\overline{e^z}=e^z e^{\bar z}=e^{z+\bar z}=e^{2\mathrm{Re}(z)}(>0)=(e^{\mathrm{Re}(z)})^2\ \Rightarrow\ |e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}$.

$1=|e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}\ \Leftrightarrow\ \mathrm{Re}(z)=0$

10.) $a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a \Rightarrow \exp(a_n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} \exp(a)$ (Stetigkeit) $a=\pm\infty$ erlaubt

speziell $\exp(1/n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1$, $\exp(n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty$, $\exp(-n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$

Bew: $a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$: $\Rightarrow |a_n|<1\ \forall\ n\geq n_0(1) \underbrace{\Rightarrow}_{|x|<1} 1+x<\exp(x)\leq \dfrac{1}{1-x} \Rightarrow$

$$1+a_n \leq \exp(a_n) \leq \frac{1}{1-a_n}\ \forall\ n\geq n_0(1) \Rightarrow 1=\exp(0) \quad \text{und}$$

$a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a\neq 0$: $\exp(a_n)-\exp(a) \underbrace{=}_{2.3.18\ 3.)} \exp(a)(\exp(\underbrace{a_n-a}_{\to 0})-1) \underbrace{\to}_{n\to\infty} \exp(a)\cdot 0=0$

Formulierung für komplexe Folgen:

$z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z \Rightarrow e^{z_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} e^z$

*//**S2.3.13** (1405)* $|(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n-(1+z)|\leq|z|^2(1+\frac{|z|}{n-2})^{n-2}\leq$

// $|z|^2 4^{[|z|]+1}\ \forall\ n\geq 3, z\in C$ *//*

Bew: $\tilde{z}_n=z_n-z\to 0$, Benutzt wird $|e^z-1|-|z|\leq|e^z-(1-z)| \underbrace{<=}_{S2.3.13,\ n-2\to\infty} |z|^2 e^{|z|} \Rightarrow$

$$|\underbrace{e^{\tilde{z}_n}}_{\substack{\to 1\\ n\to\infty}}-1|\leq|\tilde{z}_n|+|\tilde{z}_n|^2 e^{|\tilde{z}_n|}\leq|\tilde{z}_n|(1+|\tilde{z}_n|e^{|\tilde{z}_n|}) \quad (\text{d.h. } |\tilde{z}_n|(1+k\,e^k) \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$$

$$z_n\to z \Leftrightarrow \tilde{z}_n = z_n-z\to 0. \quad e^{z_n}=e^{\tilde{z}_n}e^z \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1*e^z=e^z$$

Bem: $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty \Rightarrow e^{x_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty$, $e^{x_n}\geq 1+x_n$

$x \underbrace{\to}_{n\to\infty} -\infty \Rightarrow e^{x_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$, $e^{x_n}=\dfrac{1}{e^{-x_n}} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$

11.) Für $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ gilt immer $e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Siehe auch D2.3.3 Bsp 5.) (1455)

*//**S2.3.8** (1402) $x \in R \wedge x \neq 0 \wedge n > -x \wedge x_n = (1+x/n)^n \;\forall\, n \in N$: (x_n) ↑ //*

*//**S2.3.10** (1403) $[(1+1/n)^n, (1+1/n)^{n+1}]$ ist für eine Intervallschachtelung//*

// mit $\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^{n+1} =: e$, $n \in N$ d.h. $2{,}37 < e < 3{,}16$

*//**S2.3.15** (1406) $\forall\, x \in R \;\exists \lim_{n\to\infty} (1+x/n)^n = \lim_{n\to\infty} (1-x/n)^{-n}$//*

*//**S2.3.18** (1409) 5.) (1409) $\forall\, x \in R \;\exists\, \exp(x) = \lim_{n\to\infty} (1+x/n)^n = \lim_{n\to\infty} (1-x/n)^{-n} = \frac{1}{\exp(-x)}$*

Bew: Seien $d_n = \frac{n^n}{e^n n!}$, $e_n = nd_n = \frac{n^{n+1}}{e^n n!}$, dann ist

$$d_{n+1}/d_n = \frac{(n+1)^{n+1} e^n n!}{e^{n+1}(n+1)!\,n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^1 (n+1) n^n} = \frac{(n+1)^n e^{-1}}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1} = (1+1/n)^n e^{-1},$$

und die rechte Seite geht streng monoton wachsend gegen 1
(nach S2.3.8 $(1+1/n)^n$ ↑, mit S2.3.10 gegen e), ist also insbesondere
<1. Also ist d_n streng monoton fallend ($d_{n+1}/d_n < 1 \Rightarrow d_n > d_{n+1}$).

Weiter $e_n/e_{n+1} = \frac{n^{n+1} e^{n+1} (n+1)!}{e^n n! (n+1)^{n+2}} = \frac{n^{n+1} e^1}{(n+1)^{n+1}} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e(1-1/(n+1))^{n+1} \overbrace{\underset{n\to\infty}{\rightarrow}}^{<=} 1$

$\Rightarrow e_{n+1} > e_n$ $\quad ((1-1/(n+1))^{n+1}$ ↑, $\frac{1}{\underbrace{(1-1/(n+1))^{-(n+1)}}_{\to 1/e}})$

Daraus folgt $d_n < d_1 = \frac{1^1}{e^1 1!} = \frac{1}{e} = \frac{1^{1+1}}{e^1 1!} = e_1 < e_n$ für $n \geq 2$ und daraus ergibt sich die

Beh: $ed_n < 1 < ee_n \Rightarrow e\,\frac{n^n}{e^n n!} < 1 < e\,\frac{n^{n+1}}{e^n n!} \Rightarrow$ Beh

Andere Formulierung Für $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$ gilt immer $e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$:

*// **2.3.9** (1403)* $b_n:=(1+1/n)^{n+1}$ $\searrow$ //

Bew:Anwendung $\sqrt[n]{n!}\,/\,\frac{n}{e} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ $\nearrow$ $(1+1/n)^n \leq e \leq (1+1/n)^{n+1}\searrow$

Induktion nach n. $e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$

n=1: $\left(\frac{1}{e}\right)^1 e \leq 1! \leq \left(\frac{1}{e}\right)^1 *1*e$

IH n: $\left(\frac{n}{e}\right)^n e \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n ne.$

n n+1: $(n+1)!=n!(n+1)$

$$n!(n+1) \leq \underbrace{\left(\frac{n}{e}\right)^n ne}_{>=n!}(n+1) = \frac{n^{n+1}}{e^n}e(n+1) =$$

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}e^2(n+1) = \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}(n+1)e\frac{en^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}(n+1)e\underbrace{\frac{e}{(n+1/n)^{n+1}}}_{<=1} \leq \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}(n+1)e$$

$$(n+1)!=n!(n+1) \geq \underbrace{\left(\frac{n}{e}\right)^n e}_{<=n!}(n+1) = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}e^2(n+1) =$$

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}e^2\frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}e\underbrace{\frac{e}{(1+1/n)^n}}_{>1} \geq \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}e$$

12.) $(1+z/n)^n$ ist Cauchy Folge $\forall$ $z\in\mathbb{C}$.

Bew: $\exists$ $\exp(z)=e^z=\lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n$ $\forall$ $z\in\mathbb{C}$. für $n>m$ gilt:

$$|(1+z/n)^n-(1+z/m)^m| \leq (1+\frac{|z|}{n})^n-(1+\frac{|z|}{m})^m \leq e^{|z|}-(1+\frac{|z|}{m})^m.$$

Da $(1+\frac{|z|}{n})^n \nearrow e^{|z|} \Rightarrow (1+\frac{|z|}{n})^n$ $n\in\mathbb{N}$ ist Cauchy Folge $\forall$ $z\in\mathbb{C}$.