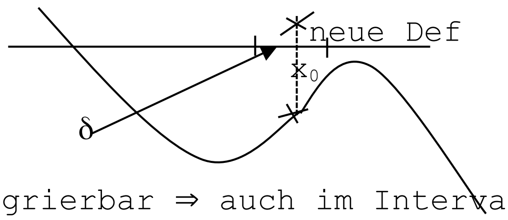
A6.2.1 Finde den Zusammenhang zwischen den Obersummen von f und den Untersummen von –f.
Tip: sup=-inf

A6.2.2 Finde Ober- und Unterintegral der Dirichletschen Sprungfunktion
???????????????????
Tip: Oberintegral immer0, Unterintegral immer 1...nicht integrierbar

A6.2.3 Sei f über [a,b] integrierbar und sei g(x)=f(x) bis auf endlich viele x∈[a,b]. Zeige, dass auch g über [a,b] integrierbar ist und dass $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

//**S6.1.8** (3119)f über [a,b] integrierbar ist dort beschränkt //
Lös:



f integrierbar ⇒ auch im Intervall $[x_0-\delta,x_0+\delta]$integrierbar

$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx=$

$\int_a^{x_0-\delta} g(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^{b} g(x)dx$. # hier $|g(x)|=|f(x)| \underbrace{\overset{S6.1.8}{\leq}}_{f\ \text{integrierb}} K$ #

$-\varepsilon<K2\delta\leq\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)dx\leq\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)dx\leq K2\delta<\varepsilon$ falls $\delta<\varepsilon/2K$ ⇒

$|I-\int_a^b g(x)dx|<\varepsilon$, $|I-\int_a^b g(x)dx|<\varepsilon$. Abändern an einer Stelle ändert nichts, d. h. (Induktion)auch an mehr Stellen ändert nichts.

A6.2.4 Sei f über [a,b] integrierbar. Zeige die Integrierbarkeit von f^+,f^- mit $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$, $f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$ $\forall$ x∈[a,b].

//**S6.1.7**(3117) Riemannsches Integrabilitätskriterium
//a) Eine beschränkte Funktion f:[a,b]→R ist genau dann über [a,b]
// integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Zerlegung Z von [a,b] gibt
// mit $O(Z)-U(Z)<\varepsilon$.

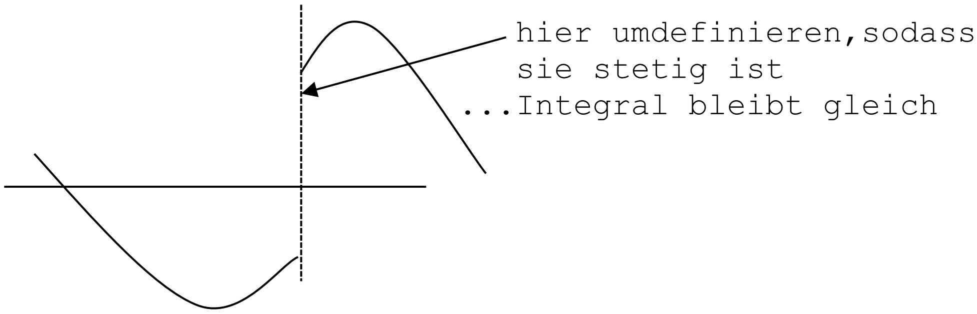
Lös: $\forall$ $Z\in\mathcal{Z}(a,b)$: $0 \underbrace{\leq}_{O>U} (\overline{S}_Z(f^+)-\underline{S}_Z(f^+)) \underbrace{\leq}_{*} (\overline{S}_Z(f)-\underline{S}_Z(f)) \underbrace{<}_{f\ \text{integrb}} \varepsilon$ bzw

$0 \underbrace{\leq}_{O>U} (\overline{S}_Z(f^-)-\underline{S}_Z(f^-)) \underbrace{\leq}_{*} (\overline{S}_Z(f)-\underline{S}_Z(f)) \underbrace{<}_{f\ \text{integrb}} \varepsilon$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S6.1.7}$ f^+,f^- integrierbar ⇒
$f^++f^-=|f|$, $f^+-f^-=f$, $f^+=1/2(|f|+f)$...|f| integrierbar
Überlegungsskizze: O>U & O-U=0 in Teilen $f^+=0$...kein Beitrag zu O-U#

A6.2.5 Zeige, dass stückweise stetige Funktionen immer integrierbar sind.

Lös:



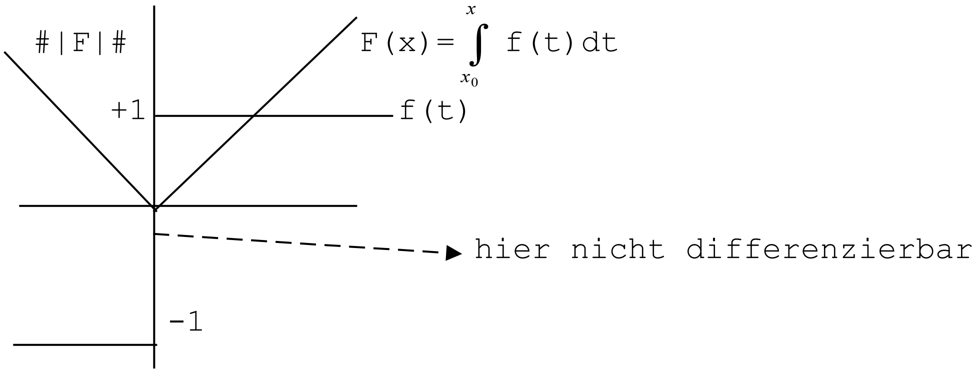
//**S6.2.6**(3209) Sei f über [a,b] integrierbar und sei $x_0 \in [a,b]$ sowie

// $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt \ \forall\ x\in[a,b]$.

// Dann erfüllt F eine Lipschitzbedingung auf [a,b] und ist

// insbesondere dort stetig.

A6.2.6 Gib ein Bsp einer über [a,b] integrierbaren Funktion f, für welche die in S6.2.6 definierte Funktion F nicht auf [a,b] differenzierbar ist.



A6.2.7 Berechne $\int_0^1 x^2 dx$ mit Hilfe des Ober- und Unterintegrals

für eine zulässige Zerlegungsfolge (Z_n).

Hinweis: $\sum_{k=1}^{n} k^2=n(n+1)(2n+1)/6$

Lös: (Z_n) : $Z_n=\{0,1/2,2/n...n/n\}$

$\underline{\int_0^1} x^2 dx=\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}(Z_n)$, $\underline{S}(Z_n)=\sum_{k=1}^{n} \inf\{f(x), \frac{k-1}{n} \le x \le \frac{k}{n}\}(k/n-\frac{k-1}{n})=$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2}\frac{1}{n}$ #$=1/n^3 \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$ #$=1/n^3 \sum_{k=1}^{n-1} k^2=\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \underset{n\to\infty}{\to} 1/3$

$\overline{\int_0^1} x^2 dx=\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}(Z_n)$, $\overline{S}(Z_n)=\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n}= 1/n^3 \sum_{k=1}^{n} k^2=$

$\frac{n(n+1)(2n-1)}{6n^3} \underset{n\to\infty}{\to} 1/3\ (n\to\infty)$

$x\mapsto x^3$ stetig $\Rightarrow$ ist integrierbar, $\int_0^1 x^2 dx=1/3$