A4.4.14 Gegeben sei eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelte

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$. Zeige, dass dann $\underbrace{\max}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ existiert

//**S4.4.7**(2560) Vor: $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ & M kompakt, $f:M\to\mathbb{R}$ stetig auf M.

//Beh:$\exists \min_{z\in M} f(z) = \min f(M) \in \mathbb{R}$ und $\exists \max_{z\in M} f(z) = \max f(M) \in \mathbb{R}$, d.h.

// $\exists\ z_1, z_2 \in M$ mit $f(z_1) \le f(z) \le f(z_2)\ \forall\ z\in M$.

Lös:Fall 1:Wenn $f(x)=0\ \forall\ x\in\mathbb{R}$, $\max|f(x)|=0$

Fall 2:$\exists\ \tilde{x}\in\mathbb{R}$ mit $|f(\tilde{x})|>0 \Rightarrow$

$\exists\ x_2 > \tilde{x}$ mit $|f(x)| \le \dfrac{|f(\tilde{x})|}{2}\ \forall\ x\ge x_2$ &

$\exists\ x_1 < \tilde{x}$ mit $|f(x)| \le \dfrac{|f(\tilde{x})|}{2}\ \forall\ x\le x_1$

$\underset{S4.4.7,[x_1,x_2]kompakt}{\Rightarrow} \exists\ m=\max|f(x)|$, $|f(x)|$ ist stetig in $x\in[x_1,x_2]$) $\Rightarrow$

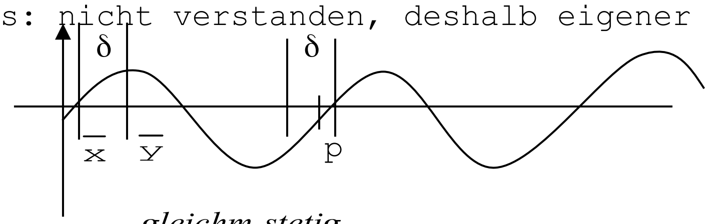
$\exists\ m=\max|f(x_0)|$ für $x_0\in[x_1,x_2]$ $\underbrace{\Rightarrow}_{m\ge|f(\tilde{x})|}$ $|f(x)|\le m\ \forall\ x\in\mathbb{R}$? $\Rightarrow m=\max|f(x)|\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

A4.4.17

Es sei f eine auf **R** stetige Funktion, für die gilt:
$\exists\ p>0: f(x+p)=f(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Man nennt dann f auch periodisch mit Periodenlänge p.
Zeige, dass die Funktion f auf **R** gleichmäßig stetig ist.

*//**S4.4.9**(2565)Gleichmäßige Stetigkeit//*
//Vor:Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ und M kompakt (2560), $f:M\to\mathbb{C}$ stetig auf M.//
//Beh:f ist gleichmäßig stetig auf M.//

Lös: nicht verstanden, deshalb eigener Versuch Seite 2569



$[0,p]\ \underbrace{\textit{gleichm.stetig}}_{S4.4.9}\ \forall\ |x-y|<\delta\ldots$

$[0,2p]\ \underbrace{\textit{gleichm.stetig}}_{S4.4.9}$

Bew:Z.z. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall\ x_1,x_2\in\mathbb{R}.\ |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

(.) $f(x+p)=f(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow \forall\ k\in\mathbb{Z},\ f(x+kp)=f(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

(..) f auf **R** stetig $\Rightarrow$ f auf $[0,2p]$ stetig $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.9}$

f auf $[0,2p]$ gleichmäßig stetig.

$\forall\ \varepsilon_1>0\ \exists\ \delta_1>0:\ \forall\ x_1,x_2\in[0,2p]:|x_1-x_2|<\delta_1 \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_1$

(...) $\forall\ x\in\mathbb{R}\ \exists\ k\in\mathbb{Z},\ r\in[0,p):x=kp+r$

Falls $x=k_xp+r_x,\ y=k_yp+r_y$ und $|x-y|<p \Rightarrow |k_x-k_y|\le 1$, da

Für $k=\min\{k_x,k_y\}$: $x-kp\in[0,2p]$ und $y-kp\in[0,2p]$

Sei: neues $\varepsilon>0$ beliebig. Setze $\varepsilon_1=\varepsilon$ und bestimme δ_1.

Setze $\delta=\min\{\delta_1,p\}$, dann $\forall\ x_1,x_2\in\mathbb{R},\ |x_1-x_2|<\delta,\ k=\min\{k_{x_1},k_{x_2}\}\ \underbrace{\Rightarrow}_{(...)}$

$x_1-k_p\in[0,2p],\ x_2-k_p\in[0,2p]$ und $|(x_1-kp)-(x_2-kp)|=|x_1-x_2|<\delta\ \underbrace{\Rightarrow}_{(..)}$

$||f(x_1-kp)-f(x_2-kp)|<\varepsilon\ \underbrace{\Rightarrow}_{(.)}\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

Eigener Lösungsversuch

//**S1.5.15**(759)

//1.) $\forall\ a\in\mathbb{R}\ \exists$ das größte Ganze von a, d.h. $\exists\ [a]\in\mathbb{Z}$ mit

// $[a]\leq a<[a]+1,\ [a]:=\max\{n\in\mathbb{Z}\mid n\leq a\}$

//**S1.5.16**(761) **(**Division mit Rest)

// $\forall\ p\in\mathbb{Z}$ und $n\in\mathbb{N}\ \exists$ eindeutig bestimmte Zahlen $q\in\mathbb{Z}$ und

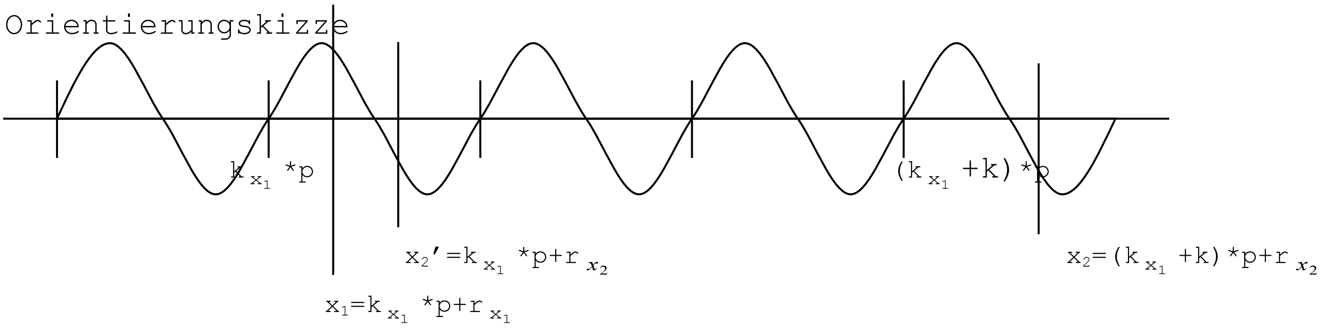
// $r\in\{0,...,n-1\}$ mit $p=nq+r$

*//**S4.4.8**(2565)Gleichmäßige Stetigkeit//*

//Vor:Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ und M kompakt, $f:M\to\mathbb{C}$ stetig auf M.//

//Beh:f ist gleichmäßig stetig auf M.//

Orientierungskizze



Bew: $\bullet$ S1.5.16: $\forall\ [\delta]\in\mathbb{Z}$ und $p\in\mathbb{N}\ \exists$ eindeutig bestimmte Zahlen $k\in\mathbb{Z}$ und $t\in\{0,...,p-1\}$ mit $[\delta]=pk+t$

$\bullet\bullet$ S1.5.15 $\Rightarrow\ \forall\ \delta>0,\ \delta\in\mathbb{R},\ \exists\ [\delta]\in\mathbb{Z}$: $[\delta]\leq\delta<[\delta]+1,\ [\delta]:=\max\{n\in\mathbb{Z}\mid n\leq\delta\}\ \Rightarrow$ $\exists\ s\in[0,1),\ s>0,\ \delta=[\delta]+s$

$\bullet\bullet\bullet$ ($\bullet$ & $\bullet\bullet$) $\Rightarrow\ \forall\ \delta\in\mathbb{R}\ \exists\ k\in\mathbb{Z},\ p\in\mathbb{N},\ r\in[0,p)$: $\delta=[\delta]+s=kp+t+s=kp+r$

Z.z. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall\ x_1,x_2\in\mathbb{R},|x_1-x_2|<\delta$: $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

(.) $f(x+p)=f(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \forall\ k\in\mathbb{Z},\ f(x+kp)=f(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

(..) f auf $\mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f auf $[kp,(k+1)p]$ stetig $\underset{S4.4.8}{\Rightarrow}$ f auf $[kp,(k+1)p]$ gleichmäßig stetig.

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta'>0$: $\forall\ x_1,x_2'\in[kp,(k+1)p]$: $|x_2'-x_1|<\delta'$: $|f(x_2')-f(x_1)|<\varepsilon$

$\bullet\bullet\bullet$: Sei $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1=k_{x_1}p+r_{x_1}\in[k_{x_1}*p,\ (k_{x_1}+1)*p]$,

$x_2=(k_{x_1}+k)p+r_{x_2},[(k_{x_1}+k)*p,\ (k_{x_1}+k+1)*p]$,

$x_2'=k_{x_1}p+r_{x_2}\in[k_{x_1}*p,\ (k_{x_1}+1)*p]$

$\underset{(.)}{\Rightarrow}$ $f(k_{x_1}p+r_{x_2})=f(x_2')=f(k_{x_1}+k)p+r_{x_2})=f(x_2)\ \Rightarrow$

$\delta=|x_2-x_1|=|(k_{x_1}+k)p+r_{x_2}-k_{x_1}p-r_{x_1}|=|kp+(r_{x_2}-r_{x_1})|=|kp+r|\in\mathbb{R}$

$\delta'=|x_2'-x_1|=|k_{x_1}p+r_{x_2}-k_{x_1}p-r_{x_1}|=|r_{x_2}-r_{x_1}|,r=(r_{x_2}-r_{x_1})\in[0,p)$

$\Rightarrow\ |x_2-x_1|<\delta\ \Leftrightarrow\ |x_2'-x_1|<\delta'$

$\underset{(..)}{\Rightarrow}$ $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta'>0\ \forall\ x_1,x_2'\in\mathbb{R},|x_2'-x_1|<\delta'$: $|f(x_2')-f(x_1)|=|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon\ \Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall\ x_1,x_2\in\mathbb{R},|x_2-x_1|<\delta$: $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$

A4.4.18 Geg sei eine stetige Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ($a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$).
Zeige, dass genau dann eine stetige Fortsetzung $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ von f existiert, wenn f gleichmäßig stetig ist.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ($a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$) gleichmäßig stetig $\Leftrightarrow$
$F:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig mit $F|_{(a,b)}=f$

//**S4.4.8**(2565) Gleichmäßige Stetigkeit von f
//Vor: Sei $M\subset\mathbb{K}$ & M kompakt(d.h. abgeschl& beschränkt)
// $f:M\to\mathbb{K}$ stetig auf M.
//Aussage: f ist gleichmäßig stetig auf M.
//**S4.4.10**(2568) Ist $f:I\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf I,so ist f stetig auf I
//***S4.2.2***(2304)*Sei* $M\subset\mathbb{R}$, $x_0\in M'$, $f:M\to\mathbb{R}$//
// *Bem:3.)* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$
// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ *mit* $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\ \forall\ x_1,x_2\in M\cap \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$. //

Lös: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.10} f:(a,b)\to\mathbb{R}$ stetig

„⇒" $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig mit $F|_{(a,b)}=f \underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.8}$ F gleichmäßig stetig
$\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig

„⇐" $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ sei gleichm stetig, d.h.
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$, so dass $\forall\ x,y\in(a,b)$ mit $|x-y|<\delta: |f(x)-f(y)|<\varepsilon \Rightarrow$
(*) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0,\ \forall\ x,y\in(a,a+\delta)$ mit $|f(x)-f(y)|<\varepsilon \underbrace{\Rightarrow}_{S4.2.2\,Bem\,3.)} \exists\ \alpha=\lim\limits_{x\to a_+}$
f(x)

Genauso zeigt man, dass $\beta=\lim\limits_{x\to b_-} f(x)$ existiert .

Definiere $F:[a,b]\to\mathbb{R}$. $F(x)=\begin{cases}\alpha_+ & x=a\\ f(x) & x\in(a,b)\\ \beta_- & x=b\end{cases}$,

dann ist f stetig $\Rightarrow$ Beh

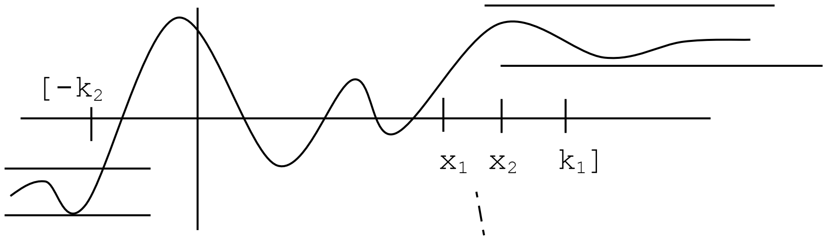
(*) $(a,a+\delta)\not\subset(a,b)$? also ist in $(a,a+\delta)$ nicht die gleichmäßige
Stetigkeit erklärt?

A4.4.19

a) Zeige: Ist die Funktion f auf $\mathbb{R}$ stetig und existieren die Grenzwerte von f für $x\to\infty$ und $x\to-\infty$, so ist f gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

*//**S4.4.8**(2563)Gleichmäßige Stetigkeit//*
//Vor:Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ und M kompakt, $f:M\to\mathbb{C}$ stetig auf M.//
//Beh:f ist gleichmäßig stetig auf M.//
*//**D4.4.5** (2562)Gleichmäßige Stetigkeit//*
//Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$. $f:M\to\mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig auf M:$\Leftrightarrow$ //
//$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \forall\ z_1,z_2\in M:\ |z_1-z_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$

Lös:D4.4.5 (2562) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0:\ \forall\ x_1,x_2\in\mathbb{R},\ |x_1-x_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,



(.) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert $\Rightarrow\ \forall\ \varepsilon_1>0\ \exists\ k_1\in\mathbb{R}_+,\ \forall\ x_1,x_2\geq k_1:|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_1$

(..) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ existiert $\Rightarrow\ \forall\ \varepsilon_2>0\ \exists\ k_2\in\mathbb{R}_+,\ \forall\ x_1,x_2\leq -k_2:\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_2$

(...) f stetig auf $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f stetig auf $[-k_2,k_1] \underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.8}$

f gleichmäßig stetig auf $[-k_2,k_1] \underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.8}$

$\forall\ \varepsilon_3>0\ \exists\ \delta_3>0,\ \forall\ x_1,x_2\in[-k_2,k_1],|x_1-x_2|<\delta_3 \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_3$.

Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Setze $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon/3$, bestimme $k_1,k_2\in\mathbb{R}_+$, $\delta_3>0$, setze $\delta=\min\{\delta_3,k_1,k_2\}$ #>0#. Setze $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ beliebig mit $|x_1-x_2|<\delta$.

- Falls $x_1,x_2\in[-k_2,k_1]$ oder $x_1,x_2\geq k_1$ oder $x_1,x_2\leq -k_2$ folgt aus (.), (..) bzw (...) $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

● ● Falls $x_1<k_1$ und $x_2>k_1$:

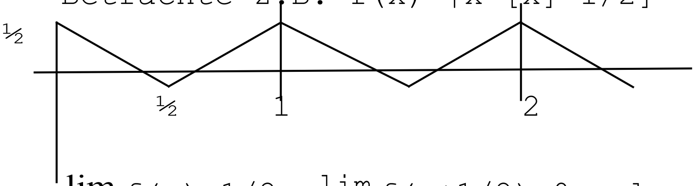
$$\#|x_1-x_2|=|x_1+k_1-k_1-x_2|\leq\underbrace{|x_1-k_1|}_{>0,da\,x_1<k_1}+\underbrace{|k_1-x_2|}_{>0,da\,x_2<k_1}<\delta \Rightarrow |x_1-k_1|<\delta \wedge |k_1-x_2|<\delta,$$

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq\underbrace{|f(x_1)-f(k_1)|}_{<\varepsilon_3}+\underbrace{|f(k_1)-f(x_2)|}_{<\varepsilon_1}<\varepsilon_3+\varepsilon_1<\varepsilon$$

● ● ● Falls $x_1<-k_2$, $x_2\in[-k_2,k]$ # $x_2>-k_2$ #, analog, insgesamt gleichmäßig stetig

b) Folgt umgekehrt aus gleichmäßiger Stetigkeit die Existenz der beiden Grenzwerte.
Anleitung:Betrachte z.B. die periodische Funktion.

Lös: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ bzw $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ müssen nicht existieren.
Betrachte z.B. $f(x)=|x-[x]-1/2]$



f auf $\mathbb{R}$ stetig und periodisch, d.h. nach A4.4.17 gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$, also für $n\in\mathbb{N}$,
$\lim\limits_{n\to 0} f(n)=1/2$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n+1/2)=0$, also $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert nicht.

A4.4.20 Gleichmäßige Stetigkeit auf geg Defbereich?

a) **f=** $\begin{cases} R \to R \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$

*//**S4.4.8**(2565) Gleichmäßige Stetigkeit von f*
//Vor: Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ und M kompakt, $f:M\to\mathbb{C}$ stetig auf M.
//Beh:f ist gleichmäßig stetig auf M.

Lös: $\sin(x)$ stetig $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.8}$ $\sin(x)$ glm stetig auf $[0,4\pi]$

$\exists\ \delta_{(\varepsilon)}>0 \underset{x,y\in[0,4\pi]\,und\,|x-y|<\delta}{:} |\sin(x)-\sin(y)|<\varepsilon\ \forall\ x,y$ mit $|x-y|<\delta$

Wahl $k\in\mathbb{Z}$: $(x'=2k\pi+x\ \&\ y'=2k\pi+y)\in[0,4\pi] \underbrace{\Rightarrow}_{\sin\ periodisch}$

$|\sin(x)-\sin(y)|=|\sin(x')-\sin(y')|<\varepsilon \Rightarrow$ sin auf $\mathbb{R}$ glm stetig

b) $g=\begin{cases} (0,1) \to R \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

Lös: $g(x)$ stetig $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.8}$ $g(x)$ glm stetig auf $[0,1]$ $\Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$: $\forall\ x,y\in[0,1]$ mit $|x-y|$ gilt stets $|g(x)-g(y)|<\varepsilon \Rightarrow$

$\forall\ x,y\in(0,1)\ \&\ \forall \underbrace{\varepsilon>0}_{gleiche\ \delta}$ $x,y\in[0,1]$ d.h.

glm Stetigkeit auf $[0,1] \Rightarrow$ glm Stetigkeit auf $(0,1)$

c) $h=\begin{cases} (0,1) \to R \\ x \mapsto \log(x) \end{cases}$

Lös: $h(x)$ nicht definiert auf $[0,1]$....$(0=e^?)$

Sei $\varepsilon=\log(\frac{3}{2})$ & $\delta>0$ beliebig klein $\underbrace{\Rightarrow}_{x=\frac{3}{2}\delta,\ y=\delta}$ $|x-y|=\frac{1}{2}\delta<\delta$,

$|h(x)-h(y)|=|\log(\frac{3}{2}\delta)-\log(\delta)|=|\log(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\delta})|=|\log(\frac{3}{2})| \underbrace{=}_{\forall\delta\ beliebig\ klein} \log(\frac{3}{2})\geq\varepsilon$

$\Rightarrow h(x)$ nicht glm stetig.

Bem: $h(x)$ glm stetig auf $\underbrace{[a,1]}_{für\ 0<a<1}$. Die $[a,1]$ können $(0,1)$ beliebig genau ausfüllen, sie kommen aber nicht an den Randpunkt, da sie immer einen bestimmten echten Mindestabstand zum Nullpunkt aufweisen, während(0,1) keinen Mindestabstand zu Null besitzt, aber 0 trotzdem nicht enthält.

A4.4.21 Geg sei ein Intervall $I\subset\mathbb{R}$ und eine Funktion $f:I\to\mathbb{R}$.

Zeige, dass f genau dann gleichmäßig stetig auf I ist, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ in I mit

$$x_n - y_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \text{ auch } f(x_n)-f(x_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \text{ gilt.}$$

Lös: (.) $f: I\to \mathbb{R}$ sei gleichmäßig stetig, d.h.

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0,\ \forall\ x,y\in I$ mit $|x-y|<\delta$ gilt $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Weiter seien $(x_n),(y_n)$ Folgen in I mit $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$

Z.z.: $f(x_n)-f(y_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$.

Sei $\varepsilon>0$ baf. $\Rightarrow\ \exists\ n_0(x)$: $|x_n-y_n|<\delta(=\delta(\varepsilon))$.

$\forall\ n\geq n_0(\varepsilon)$ gilt $\Rightarrow |f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon\ \forall\ n>n_0(\varepsilon)$

Also gilt $\lim_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=0$

(.) Nun sei f nicht gleichmäßig stetig, d.h.

$\exists\ \varepsilon_0>0\ \forall\ \delta>0\ \exists\ x,y\in I$ mit $|x-y|<\delta$: $|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon_0$.

Sei ein solches $\varepsilon_0>0$ geg. $\Rightarrow$

$\exists\ x_n,y_n\in I,\ \forall\ n\in\mathbb{N}$ mit $|x_n-y_n|<1/n$ und $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0 \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ aber $f(x_n)-f(y_n) \overset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0 \Rightarrow$ Widerspruch

A4.4.22

a) Es sei $M\subset\mathbb{C}$ und $f: M\to\mathbb{C}$. Zeige:
f gleichmäßig stetig auf M $\Rightarrow$ $|f|$ gleichmäßig stetig auf M

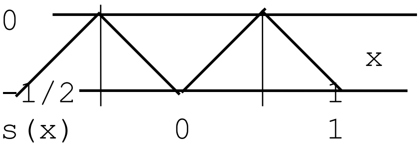
b) Bestimme alle Unstetigkeitsstellen der Funktion

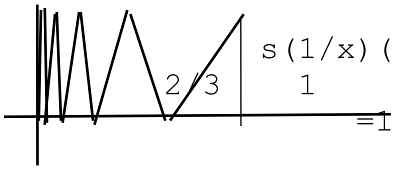
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad f(x)=\begin{cases} i, \text{ für } x\in\mathbb{Q} \\ -i, \text{ für } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

(Dieses Bsp zeigt, dass die Umkehrung von a) nicht gilt)

A4.4.23 Es sei $s(x):=|x-[x]-1/2|$, $x\in\mathbb{R}$, und $f(x)=\begin{cases} s(1/x) \text{ für } x\in(0,1] \\ 0 \text{ für } x=0 \end{cases}$

a) Untersuche die Funktion $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ auf gleichmäßige Stetigkeit





$s(1/x)$ (=0 für $1/x=0,5;\ 1,5;\ 2,5..$
$x=$ ~~2~~ $2/3;\ 2/5\ldots$
=1/2 für $1/x=\ 1;\ 2;\ 3\ldots$
$x=\ 1;\ ½;\ 1/3\ldots$

*//**D4.4.5** (2562) $M\subset\mathbb{R}$ & $M\subset\mathbb{C}$. $f:M\to\mathbb{C}$ gleichmäßig stetig auf $M:\Leftrightarrow$ //*
$//\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \forall\ z_1,z_2\in M:\ |z_1-z_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$
//Bem: $f:M\to\mathbb{C}$ ist gleichmäßig stetig auf $M \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$//
// (δ unabhängig von $z\in M$) mit: $\forall\ z_0\in M,\ \forall\ z\in M\cap U_\delta(z_0)$ gilt//
// $f(z)\in U_\varepsilon(z_0)$.//

Lös: $\forall\ n\in\mathbb{N}: f(1/n)-f\left(\frac{1}{n+1/2}\right)=s(n)-s(n+1/2)=|n-\underbrace{[n]}_{n}-\frac{1}{2}|-|n+\frac{1}{2}-\underbrace{[n+\frac{1}{2}]}_{n}-\frac{1}{2}|=$

$1/2-0=1/2 \underset{D4.4.5}{\Rightarrow}$ f nicht gleichmäßig stetig auf $(0,1]$, denn sonst würde zu $\varepsilon=1/2$ ein $\delta>0$ existieren mit:
(*) $|f(x)-f(y)|<\varepsilon=1/2\ \ \forall!!!\ x,y\in(0,1]$ mit $|x-y|<\delta$.
Da $1/n-\frac{1}{n+1/2}=1/n-\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n(2n+1)} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \exists\ n_0\in\mathbb{N}:\ 1/n_0-\frac{1}{n_0+1/2}<\delta \Rightarrow$

$1/2=f(1/n_0)-f\left(\frac{1}{n_0-1/2}\right)=|f(1/n_0)-f\left(\frac{1}{n_0+1/2}\right)|\underset{*}{<}\varepsilon=1/2$ Widerspruch!!

\# $\forall\ \delta>0$, (auch beliebig klein) $\exists\ z_1=1/n_0$ und $z_2=\frac{1}{n_0+1/2}$:
\# $|f(z_1)-f(z_2)|=1/2$, also nicht $<1/2 \Rightarrow$
\# $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ \forall\ z_1,z_2\in M:\ |z_1-z_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|=1/2<\varepsilon$

b) Ist f auf (0,1] stetig?

//**S4.3.2** (2403) Folgenstetigkeit//
// *Genau dann ist $f=D\to K$ stetig in $x_0\in D$, wenn für jede Folge*//
// *(x_n) in D mit $x_n\to x_0$ auch $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)$ gilt.*//
//**S4.3.3** (2403) *Rechenregeln für Stetigkeit*//
//*Vor: f,g: $M\to R$ stetig im Punkt $x_0\in M$.*//
//*Beh: 3.) Sind $f:D\to D_1$ stetig in $x_0\in D$ und $g:D_1\to K$ stetig in $f(x_0)\in D_1$, so*
// *ist die Hintereinanderausführung $g\circ f:D\to K$ stetig in x_0.*//
//**S4.4.3** (2530) *Umkehrfunktion*//
//*Ist $f:I\to R$ streng monoton und stetig, so besitzt f auf dem Intervall// //$J=f(I)$ eine Umkehrfunktion f^{-1}, welche dort stetig ist und im selben// //Sinne wie f streng monoton ist.*//

Lös: $s(x):=|x-[x]-1/2|$, ist stetig auf R, wie man z.B. mit dem Folgenkriterium nachprüft.

$\left||x_0-[x_0]-\frac{1}{2}|-|x_n-[x_n]-\frac{1}{2}|\right| \le |x_0-[x_0]-\frac{1}{2}-x_n+[x_n]+\frac{1}{2}| \underset{x_n\to x_0}{=} |\underbrace{x_0-x_n}_{\underset{n\to\infty}{\to} 0}+\underbrace{[x_n]-[x_0]}_{\underset{n\to\infty}{=} 0}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

|

$\underset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall\ x_0\in R \Rightarrow s(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} s(x_0) \underset{S4.3.2}{\Rightarrow}$ s(x) stetig auf R

f(x)=x stetig auf R $\underset{S4.4.3}{\Rightarrow}$

1/x ist stetig auf (0,1] (sogar auf $R\setminus\{0\}$) $\underset{S4.3.3\ 3.)}{\Rightarrow}$ f(x)=s(1/x) ist stetig auf (0,1]

c) Ist f in $x_0=0$ stetig?

Lös: f ist in $x_0=0$ unstetig, denn sonst wäre f mit b) stetig auf kompakter Menge [0,1] $\underset{S}{\Rightarrow}$ f glm stetig auf [0,1], insbesondere glm stetig auf (0,1] ⇒ Widerspruch zu (a)

Bem: Mit dem Folgenkriterium sieht man, dass $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x)$ nicht existiert.