**A4.4.7** Zeige die Stetigkeit der Funktion
a) $a^x$ auf $\mathbb{R}$, wobei $a\in\mathbb{R}_+$.
//**S4.3.3**(2408) Vor: f,g mit $M\to\mathbb{R}$, stetig im Punkt $x_0\in M$.//
// 3.) Sind $f:D\to D_1$ stetig in $x_0\in D$ und $g:D_1\to\mathbb{K}$ stetig in $x_0\in D$ bzw//
// $f(x_0)\in D_1$, so ist die Hintereinanderausführung //
// $g\circ f:D\to\mathbb{K}$ stetig in $x_0$.//

Lös: $a^x=e^{x\log a}$, f:x & xlog a stetig, Werte in $\mathbb{R}$,
g:y & $e^y$ stetig auf $\mathbb{R}\underbrace{\Rightarrow}_{S4.3.3\ 3.)}a^x=g\circ f(x)$ stetig
b) $x^a$ auf $\mathbb{R}_+$, wobei $a\in\mathbb{R}$.

//**S4.4.3**(2530) Ist $f:I\to\mathbb{R}$ streng monoton und stetig auf I, so besitzt f //
//auf dem Intervall J=f(I) eine Umkehrfunktion $f^{-1}$, welche dort stetig ist/
//und im selben Sinne wie f streng monoton ist.//
Lös: $x^a=e^{a\log x}=h\circ g\circ f(x)$.
$f:x\ \underbrace{\log x}_{=f^{-1}(\exp(x))}\in\mathbb{R}_+\ \underbrace{stetig}_{S4.3.3}$. $g:\underbrace{y}_{\in R}\ (\underbrace{a}_{\in R}\ y)\in\mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$. $h:\underbrace{z}_{\in R}\mapsto e^z$ stetig auf $\mathbb{R}$,
$\Rightarrow x^a$ stetig auf $\mathbb{R}_+$.

**A4.4.8** $A\subset\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$, $\forall\ a,b\in A$, $a<b:[a,b]\subset A$ (Zwischenwerteigenschaft).
Zeige: A ist ein Intervall.

**A4.4.10** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sinh x$. Zeige, dass f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Umkehrfunktion besitzt.

//**D3.6.4***(2150)* $\sinh z:=1/2(e^z-e^{-z})\ \forall\ z\in\mathbb{C}$//
*//**S4.4.3** (2530)Umkehrfunktion//*
*//Ist $f:I\to\mathbb{R}$ streng monoton und stetig, so besitzt f auf dem Intervall// //J=f(I) eine Umkehrfunktion $f^{-1}$, welche dort stetig ist und im selben// //Sinne wie f streng monoton ist.//*
Bew: $f(x)=\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ und $\uparrow$ auf $\mathbb{R}$, denn für $x_1,x_2\in\mathbb{R}$
mit $x_1<x_2$ gilt: $e^{x_1}<e^{x_2}$ (da e-Fkt $\uparrow$), $e^{-x_1}>e^{-x_2}$, $-e^{-x_1}<-e^{-x_2}\Rightarrow$
$f(x_1)=1/2(\underbrace{e^{x_1}}_{<e^{x_2}}+(\underbrace{-e^{-x_1}}_{<-e^{-x_2}}))<1/2(e^{x_2}-e^{-x_2})=f(x_2)$
Sei $\underbrace{I}_{=\text{Intervall}}:=\mathbb{R}$ und $J:=f(\mathbb{R})\ \underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.3}$
Zu f $\exists$ Umkehrfkt $f^{-1}: J\to I\in\mathbb{R}$, die stetig und $\uparrow$.
Noch z.z. $J=\mathbb{R}$!
Es gilt: (*) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ und (**) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.
Sei $y_0\in\mathbb{R}$ bel., wegen(*) $\exists\ a<0:f(a)<y_0$ und
wegen(**) $\exists\ b>0:f(b)>y_0$ $\overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{ZWS}}^{f\ stetig}$
$\exists\ x_0\in(a,b): f(x_0)=y_0\Rightarrow\mathbb{R}\subset f(\mathbb{R})=J$ (d.h. f ist surjektiv) $\underbrace{\Rightarrow}_{J\subset R}J=\mathbb{R}$.
Bem: Die stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion
$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ von sinh heißt Area sinus hyperbolicus. Bez: Arsinh

**A4.4.11** Zeige die Stetigkeit des Logarithmus auf $\mathbb{R}_+$.

**A4.4.12** Funktionalgleichung des Logarithmus

Zeige: $\forall\ x,y \in \mathbb{R}_+$ ist $\log(xy)=\log x+\log y$

**A4.4.13** Zeige a) $\forall\ a \in \mathbb{R}_+\ \forall\ b,c \in \mathbb{C}$: $a^b a^c = a^{b+c}$,

b) $\forall\ a \in \mathbb{R}_+\ \forall\ b \in \mathbb{R}\ \forall\ c \in \mathbb{C}$: $(a^b)^c = a^{bc}$.

Lös: a) $a^b a^c = e^{b\log a} e^{c\log a} = e^{b\log a + c\log a} = e^{(b+c)\log a} = a^{b+c}$.

b) $(a^b)^c = (e^{b\log a})^c = e^{c\log(e^{b\log a})} = e^{bc\log a} = a^{bc}$.

**A4.4.14** Zeige, dass die oben gegebene Def von $a^b$ mit der üblichen übereinstimmt, wenn $b \in \mathbb{Z}$ oder $1/b \in \mathbb{Z}\{0\}$ ist.