A3.4.1 Zeige: Ist $a_n \searrow 0 (n\to\infty)$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ und es gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} (b_{2\nu} - b_{2\nu+1})$.

*//**S3.4.2**(1900) Dirichlet-Kriterium (DirK)//*

//Mit einer reellen Folge: $a_n, b_n \in R$, $(a_n)_{n=0}^{\infty} \searrow 0$ (d.h. $a_n \geq 0$) und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ mit// //$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \Rightarrow \exists\, k>0: |B_n| \leq k \;\; \forall\, n$ gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ ist konvergent.//

*//**S3.4.1**(1900) (Abelsche partielle Summation) //*

//Vor: $(w_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$, $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $A_n := \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu$, $n \in \mathbb{N}_0$ //

//Beh: $\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu z_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1}) + A_n z_{n+1}$//

Bew:1.Möglichkeit mit **S3.4.2** DirK:

Sei $a_n = (-1)^n$, $A_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \Rightarrow A_n = \begin{cases} 1 \text{ für n gerade} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \Rightarrow$

$(A_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt $\underbrace{\overset{b_n \text{ mon fallend}}{\Rightarrow}}_{S3.4.2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{a_\nu}_{(-1)^\nu} b_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu b_\nu$ konvergiert und

$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \underbrace{A_\mu}_{=\begin{cases} 1 \, für\, \mu=2\nu \\ 0 sonst \end{cases}} (b_\mu - b_{\mu+1}) \underbrace{=}_{S3.4.1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (b_{2\nu} - b_{2\nu+1})$.

Also ist Leibnizkriterium ein Spezialfall vom Dirichletkriterium

2.Möglichkeit mit Leibnizkriterium:

*//**S3.1.2** (1602) Vor: (z_ν) und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent.//*

//Beh: 6.) Ist $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $n_0 := 0$, $n_k < n_{k+1}$, $k \in N_0$ eine Teilfolge von $(n)_{n=0}^{\infty}$ und

//setzt man $c_\nu := \sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} z_k$, $\nu \in N_0$, (zwischen n_ν und $n_{\nu+1}$ gibt es einige n_k) so

//konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ und es gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} z_k$

//(d.h. in konvergenten Reihen darf man beliebig Klammern setzen).//

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ konvergiert nach Leibnizkriterium und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n b_n}_{=: a_n} \underbrace{=}_{S3.1.2\,6.)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=2k}^{2(k+1)-1} a_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=2k}^{2k+1} a_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{2k} + a_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} (b_{2k} - b_{2k+1})$$

A3.4.2 Untersuche auf Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(1+1/n)^n$

*//**S2.3.8**(1402) Vor: $x\in R$ ˅ $x\neq 0$ ˅ $n>-x$ ˅ $x_n=(1+x/n)^n$ $\forall$ $n\in N$ //*

// Beh: (x_n) $\uparrow$ //

*//**S2.3.10**(1403)$[(1+1/n)^n, (1+1/n)^{n+1}]$ ist für eine Intervallschachtelung mit*

// $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1}=:e$, $n\in N$ d.h. $2,37<e<3,16$//

*//**S3.4.3**(1901)Vor: $(w_v),(z_v)\subset C$, $\sum_{v=0}^{\infty}|z_v-z_{v+1}|<\infty$ und $\sum_{v=0}^{n} w_v$ kvgt $(\sum_{v=0}^{n} w_v \underset{n\to\infty}{=} A)$//*

//Beh:(.)$\exists \lim_{n\to\infty} z_n$, (..) $\sum_{v=0}^{\infty}|A_v(z_v-z_{v+1})|<\infty$ und (…) $\sum_{v=0}^{\infty} w_v z_v$ ist kvgt //

Lös: 1. Möglichkeit

Sei $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $b_n=(1+1/n)^n$ $n\in N$ $\underset{2.3.10}{\Rightarrow}$ (b_n) monoton und beschränkt ˅

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nach Leibnizk. $\underset{S3.4.3\,Bem}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert.

2. Möglichkeit

*//**S3.1.4**(1605) Leibniz Kriterium//*

//Vor: $(a_n)\subset R$, $a_n \searrow 0$ $(n\to\infty)$. Beh: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ ist konvergent//

$a_n b_n$ monoton fallend..LeibnizKrit.

Sei $a_n=1/n(1+1/n)^n=\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ $\Rightarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+2)^{n+1}n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}(n+1)^n}=(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2})^{n+1}<$

$(\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2})^{n+1}=1$ $\forall$ $n\in N$ $\Rightarrow$ $a_{n+1}<a_n$ $\forall$ $n\in N$ $\Rightarrow$ a_n $\searrow$ (sogar a_n $\downarrow$)

$\lim_{n\to\infty} a_n=(\lim_{n\to\infty} 1/n)(\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n)=0\cdot e=0$ $\underset{S3.4.1}{\Rightarrow}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(1+1/n)^n$ konvergiert

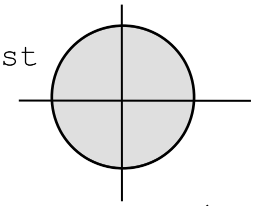
//**S3.4.2**(1900) Dirichlet-Kriterium (DirK)//

//Mit einer reellen Folge: $a_n,b_n\in R$, $(a_n)_{n=0}^{\infty}\searrow 0$ (d.h. $a_n\geq 0$) und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$

mit// //$B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k$ $\Rightarrow$ $\exists$ $k>0$: $|B_n|\leq k$ $\forall$ n gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ ist konvergent.//

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (e-(1+1/n)^n)z^n$ für $|z|\leq 1$, $z\neq 1$.

Lös: Sei $a_n=z^n$, $b_n=e-(1+1/n)^n, n\in\mathbb{N}, |z|\leq 1, z\neq 1, z\in\mathbb{C}$ fest



$$|A_n|=|\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu| \underbrace{=}_{z\neq 1} |\frac{1-z^{n+1}}{1-z}| \leq \frac{1+|z^{n+1}|}{|1-z|} \underbrace{\leq}_{|z|\leq 1}$$

$\frac{2}{|1-z|}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$, $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt, $(1+1/n)^n \nearrow e(n\to\infty) \Rightarrow b_n \searrow 0(n\to\infty)$.

$$b_{n \text{ mon fallend}\to 0} \underbrace{\Rightarrow}_{S3.4.2} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{b_n}_{(e-(1+1/n)^n} \cdot \underbrace{a_n}_{z^n}$$ konvergiert und $=\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(b_\nu-b_{\nu+1})=$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1-z^{\nu+1}}{1-z}\left[(1+\frac{1}{\nu+1})^{\nu+1}-(1+\frac{1}{\nu})^{\nu}\right]$$

Bem: Für $|z|<1$ ist die Aussage trivial, da (b_n) beschränkt ($\Rightarrow$ KR=1).
Interessant ist hier das Verhalten der Reihe für $|z|=1$