A3.2.21 Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und bestimme ggf den Wert der Reihen

a) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \binom{\mu}{\nu} \frac{1}{2^{\nu+\mu}}$

//(900)***Idenditäten:***//

$//9.) \sum_{\nu=m_1}^{n_1} \sum_{\mu=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu} = \sum_{\mu=m_2}^{n_2} \sum_{\nu=m_1}^{n_1} a_{\nu\mu} \; , \; \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\nu\mu} = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{n} a_{\nu\mu} \quad //$

$//$***S1.7.4*** (906) $6.) \forall a,b,z \in C \; \forall n \in N_0 : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} a^k , //$

$// \; (1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k , \; a=b=1 \Rightarrow 2^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \; ,//$

$// \quad 0^0=1, a=-1, b=1 \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^{\nu} = (1-1)^n = 0^n \; n \in N_0$

Lös: $\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \binom{\mu}{\nu} \frac{1}{2^{\nu+\mu}} \underbrace{\Rightarrow}_{\textit{Identitäten 9.)}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \frac{1}{2^{\nu+\mu}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu}} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} 1^{\mu-\nu} \underbrace{=}_{S1.7.4\,6.)}$

$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu}} (1/2+1)^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2*2}\right)^{\mu} =$

$\sum_{\mu=0}^{\infty} (3/4)^{\mu} = \frac{1}{1-3/4} = 4$ (insbesondere konvergiert diese Reihe) $\Rightarrow$

$\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=\nu}^{n} \binom{\mu}{\nu} \frac{1}{2^{\nu+\mu}} \underbrace{\Rightarrow}_{\textit{Identitäten 9.)}} \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \frac{1}{2^{\nu+\mu}} \le \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \frac{1}{2^{\nu+\mu}} = 4 =: M \quad \forall \; n \in \mathbf{N}_0$

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Doppelreihens3.2.9}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \binom{\mu}{\nu} \frac{1}{2^{\nu+\mu}}$ konvergiert und $= \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \frac{1}{2^{\nu+\mu}} = 4$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^n}$

Lös: $\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^n} = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^{n+2}} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^n} \underbrace{=}_{\text{geom } R \left|\frac{1}{m}\right| \le 1/2 < 1} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{1}{1-m^{-1}} =$

$= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2-m} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{m-1} - 1/m\right) = \lim_{M\to\infty} \sum_{m=2}^{M} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \underbrace{=}_{\text{Teleskops}}$

$\lim_{M\to\infty} \left(\frac{1}{2-1} - 1/M\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{k} \sum_{m=2}^{k} \frac{1}{m^n} \underbrace{\Rightarrow}_{\textit{Identitäten 9.)}} \sum_{m=2}^{k} \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{m^n} \le \sum_{m=2}^{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^n} \le$

$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^n} = 1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Doppelreihens}} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^n}$ konvergiert und $=1$

A3.2.22 Beweise für $x\in \mathbb{C}, |x|<1$ und $k\in \mathbb{N}_0$: $\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n$.

*//**D1.7.1** (905) $n\in N_0$, $\alpha\in C$ 2.)… $\binom{\alpha}{0}=1$//*
*//**S1.7.4** (906) $\alpha\in C$ ˅ $n,m,k\in N_0$, $j\in N$: 1.) $\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n+1}=\binom{\alpha+1}{n+1}$ //*
Bew:Induktion nach k

k=0 : $\frac{1}{(1-x)^0}=1/1=1+0=\underbrace{\binom{-1}{0}}_{D1.7.12.)}x^0+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\underbrace{\binom{n-1}{n}}_{0}x^n}_{0}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+0-1}{n}x^n$.

beachte: $\binom{-1}{0}=(-1)^0=1$, $\binom{n-1}{n}=0$, da $n-1<n$ und $n-1\in \mathbb{N}_0$ für $n\geq 1$

$k\mapsto k+1$: $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\frac{1}{(1-x)^k}\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{geom Reihe }|x|<1}\underset{\text{IndHyp}}{=}(\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\binom{n+k-1}{n}}_{a_n}x^n)(\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{1}_{b_n}x^n)$

$\underset{S3.2.13}{=}\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu b_{n-\nu})x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k-1}{\nu}]x^n\underset{*}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}x^n$

Zu*:Durch Induktion zeigt man:

Es gilt $\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}=\binom{\alpha+n+1}{n}$ $\forall\ \alpha\in \mathbb{C}$, $\forall\ n\in \mathbb{N}_0$.

Bew durch Induktion nach n

n=0: $\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}=\binom{\alpha}{0}=1=\binom{\alpha+1}{0}$

$n\mapsto n+1$: $\sum_{\nu=0}^{n+1}\binom{\alpha+\nu}{\nu}=\underbrace{\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+\nu}{\nu}}_{\underset{\text{IndHyp}}{=}\binom{\alpha+n+1}{n}}+\binom{\alpha+n+1}{n+1}\underset{S1.7.4\ 1.)}{=}\binom{\alpha+n+2}{n+1}$

k l	0	1	2	3
0	$a_0b_0x^0$	$a_0b_1x^1$	$a_0b_2x^2$	$a_0b_3x^3$…..
1	$a_1b_0x^1$	$a_0b_1x^1$	$a_0b_2x^2$	$a_0b_3x^3$…..
2	$a_2b_0x^2$	$a_2b_1x^3$	$a_2b_2x^4$	$a_2b_3x^5$…..
3	$a_3b_0x^3$	$a_3b_1x^4$	$a_3b_2x^5$	$a_3b_3x^6$…..

…

A3.2.23 Gib ein einfaches Bsp einer konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$, für welche die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}$ beide divergieren.
Vergleiche dies mit obigem S3.2.11.
Lös: Harmonische Reihe

A3.2.24 Es sei $z\in \mathbb{C}, |z|=1, z\neq 1$. Beweise, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k+1}$ konvergiert. Hinweis:Zeige, daß $s_n:=\sum_{k=0}^{\infty}z_k=O(1)$ ist,

A3.2.25

a) Zeige mit dem Großen Umordnungssatz: Ist $\sum_{k=p}^{\infty}\ \sum_{j=p}^{k} |a_{kj}|<\infty$, so

gilt: $\sum_{k=p}^{\infty}\ \sum_{j=p}^{k} a_{kj}=\sum_{j=p}^{\infty}\ \sum_{k=j}^{\infty} a_{kj}$.

b) Zeige $\forall\ x\in\mathbb{C}$ mit $|x|<1$ die Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k=\frac{x}{(1-x)^2}$.

Hinweis: $k=\sum_{j=1^{\wedge\wedge}}^{k} 1$.

A3.2.26 Welche der folgenden Doppelreihen sind konvergent?

a) $\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^3+n^3}$

(900) ***Idenditäten:*** *9.)* $\sum_{\nu=1}^{n}\ \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\nu\mu}=\sum_{\mu=1}^{n}\ \sum_{\nu=\mu}^{n} a_{\nu\mu}$

//S3.2.9 *(1759) Vor:* $a_{jk}\in\mathbb{C}$ *für* $j,k\in \mathbb{N}_0$. $\exists\ M\in\mathbb{R}$ *mit* $\sum_{j=0}^{n}\ \sum_{k=0}^{n} |a_{jk}|\le M\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$.*//*

//Beh:1.) $\sum_{j=0}^{\infty}\ \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|=\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{j=0}^{\infty} |a_{jk}|=:A\in\mathbb{R}$.*//*

// 2.) Ordnet man alle a_{jk}, $j,k\in\mathbb{N}_0$, *in einer Folge* $(b_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$ *an, so*

gilt// // $\sum_{l=0}^{\infty} |b_\ell|=A$ *und* $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell=\sum_{j=0}^{\infty}\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}=\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}$.*//*

// Speziell gilt $\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k=0}^{n} a_{n-k,k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\ \sum_{k=0}^{n} a_{j,k}=\sum_{\ell 1=0}^{\infty} b_\ell$.*//*

Lös: Ausführungen verstehe ich nicht!

$$\sum_{m=1}^{k}\ \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m^3+n^3}\le\sum_{m=1}^{k} \underbrace{\sum_{n=1}^{m} 1/m^3}_{mS_n}=\sum_{m=1}^{k} 1/m^2 \text{ absolut konvergent } (k\to\infty)$$

Summenreihenfolge vertauschen

$$\sum_{m=1}^{k}\ \sum_{n=1}^{m} \underbrace{\frac{1}{m^3+n^3}}_{\le 1/m^3}\#\underset{\text{Idenditäten 9.)}}{=}\sum_{n=1}^{k}\ \sum_{m=n}^{k} \underbrace{\frac{1}{m^3+n^3}}_{\le 1/m^3}\#\underset{k\to\infty}{\le}\sum_{n=1}^{\infty}\ \sum_{m=n}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{m^3+n^3}}_{m,n\,\text{vertauscht}}=\sum_{m=1}^{\infty}\ \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{m^3+n^3}$$

absolut konv

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m^3+n^3}+\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{m^3+n^3}\right)\ge\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^3+n^3}}_{\text{abs konv umord mögl}}=\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^3+n^3} \text{ konvergent}$$

b) $\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2}$

$$\text{Lös: }\sum_{m=1}^{k}\ \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m^2+n^2}>\underbrace{\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{m} 1/(2m^2)}_{n^2\le m^2}=\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2}\, m\,\frac{1}{m^2}=\underbrace{1/2\sum_{m=1}^{k}1/m}_{divergent}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2}>\sum_{m=1}^{k}\ \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m^2+n^2}\ \Rightarrow \text{divergent} \Rightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+n^2} \text{ divergent}$$

A3.2.27 Beweise

a) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ für jedes $\alpha>1/2$ absolut konvergent. Gilt die Aussage auch noch für $\alpha=1/2$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

*//**S1.9.3** (1150) Vor: $n\in N_0, a_k, b_k\in C$, $1\le k\le n$ dann//*

//Beh: $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^2\right)$ *auch* $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|^2}$ *//*

//**S3.2.4** (1714) Vor: $(a_n)\subset R$, $a_n \searrow$ Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n<\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}<\infty$//

//Bsp:1.) $\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(\log n)^\alpha}}_{\text{monoton fallend}\to 0} <\infty \Leftrightarrow \alpha>1$//

Bew: Im reellen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent $\underset{S1.9.3}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n^\alpha}\right| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}}<\infty$ für $2\alpha>1$,

d.h. $\alpha>1/2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ ist absolut konvergent.

Für $\alpha=1/2$ wird die Beh falsch, setze z.B. $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^\beta} \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{2\beta}}$ konvergiert mit einem $\beta \underset{S3.2.4}{\in} \underset{!}{(} 1/2,1]$ oder

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)}$ divergiert.

b) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann sind auch die Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n a_{n+1}|}$ und im Fall $|a_n|+|a_{n+1}|>0$? $\forall$ $n\in N$ auch

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n a_{n+1}}{|a_n|+|a_{n+1}|}$ absolut konvergent.

Bew: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|<\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n a_{n+1}|} \underset{S1.9.3}{\le} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}|}<\infty$ und

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n a_{n+1}}{|a_n|+|a_{n+1}|}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{|a_n|+|a_{n+1}|}} \frac{|a_{n+1}|}{\sqrt{|a_n|+|a_{n+1}|}} \underset{S1.9.3}{\le}$

$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{|a_n|+|a_{n+1}|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}^2}{|a_n|+|a_{n+1}|}} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|}<\infty$

A3.2.28 Gegeben seien Folgen positiver reeller Zahlen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Beweise: Wenn $\varliminf_{n\to\infty}(b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1})>0$ ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

*//**S1.7.1**(901) $m\le n\in\mathbb{N}$ und Koeffizienten $a_k\in\mathbb{C}$, $m\le k\le n$.*

// $\sum_{k=m,n\ge m}^{n}(a_k-a_{k+1})=(a_m-a_{m+1})+(a_{m+1}-a_{m+2})+(a_{m+2}-a_{m+3})+...(a_n-a_{n+1})$

// $= a_m-a_{n+1}$ heißt Teleskopsumme

// $\Delta a_k:=a_k-a_{k+1}$ die erste Differenz bei a_k.

Bew: $\exists$ n_0 mit $b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\ge c/2>0$ $\forall$ $n\ge n_0$ $\Rightarrow$ $b_na_n-b_{n+1}a_{n+1}\ge\frac{c}{2}a_{n+1}>0$ $\Rightarrow$

$(b_na_n)_{n=n_0}^{\infty}$ ist monoton fallend und beschränkt (durch $a_{n_0}b_{n_0}$ bzw 0) $\Rightarrow$

$\exists$ $\lim_{n\to\infty} b_na_n=\alpha \underbrace{\Rightarrow}_{S1.7.1} \sum_{n=1}^{\infty}(a_nb_n-a_{n+1}b_{n+1})=a_1b_1-\alpha$, insbesondere konvergent.

Wegen $a_{n+1}\le\frac{2}{c}(a_nb_n-a_{n+1}b_{n+1})$ ist

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ und # $a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ # = $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergent nach Majorantenkriterium.

A3.2.29 Betrachte die Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{x}{n}$

a) Zeige, dass die unendliche Reihe, durch die f definiert wird, $\forall\ x\geq 1$ absolut konvergiert und $\forall\ x\geq 0$ konvergiert.

*//**S3.2.2** (1700) Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}$, $b_n\geq 0$, $n\in\mathbb{N}_0$.//*

//2.) $|z_n|\leq b_n$, $\forall\ n\geq n_0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|z_n|$ konvergent//

*//**S3.1.4** (1605) Vor: $(a_n)\subset\mathbb{R}$, $a_n\searrow 0\ (n\to\infty)$.*

// Beh: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n=a_0-a_1+a_2-a_3+-\ldots$ ist konvergent.//

Bew: Für $x\in[k-1,k)$, $k\in\mathbb{Z}$ gilt $\left|\binom{x}{n}\right|=\dfrac{|x(x-1)\ldots(x-n+1)|}{n!}=$

$$\frac{\overbrace{x\underbrace{(x-1)}_{<x}\ldots\underbrace{(x-k+1)}_{<x}}^{k\text{ Faktoren}}|x-k|\ldots|x-n+1|}{n!}\leq\frac{x^k\prod_{\nu=k}^{n-1}|x-\nu|}{n!}=\frac{x^k\prod_{\nu=k}^{n-1}(\nu-x)}{n!}\underset{x\geq k-1}{\leq}$$

$$\frac{x^k}{n!}\prod_{\nu=k}^{n-1}(\nu+1-k)=\frac{x^k}{n!}(n-k)!=\frac{x^k}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}=$$

$$\frac{1}{n^k}\frac{x^k}{(1-1/n)\ldots(1-\frac{k-1}{n})}\leq\frac{c}{n^k}\quad\text{mit } c>0$$

$x\geq 1 \Rightarrow \quad k\geq 2 \underset{S3.2.2\ 2.)}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{x}{n}$ absolut konvergent.

$x\in[0,1) \Rightarrow k=1$ und $\binom{x}{n}$ eine Nullfolge. Außerdem ist für $x\in[0,1)$ die Folge $\left(\binom{x}{n}(-1)^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ Positiv (bzw 0) und monoton fallend:

$$(-1)^{n-1}\binom{x}{n}=\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}(-1)^{n-1}=$$

$$\frac{x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x)}{n!}\geq 0 \underset{S3.1.4}{\Rightarrow}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{x}{n}$ ist konvergent (nicht absolut konvergent).

b)Beweise, dass für x,y∈R gilt: $\binom{x+y}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$ bzw

$$(x+y)(x+y-1)...(x+y-n+1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x-1)...(x-k+1)y(y-1)...(y-n+k+1).$$

*//**S1.7.4**(906) Für $\alpha\in\mathbb{C}$ und $n,m,k\in\mathbb{N}_0$ $j\in\mathbb{N}$ gilt//*

//2.) $\binom{n}{m}=\begin{cases}0 \text{ falls } n<m\\ \dfrac{n!}{m!(n-m)!}, \text{falls } n\geq m\end{cases}$ *//*

//3.) $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}\underbrace{=}_{2.)}\frac{n!}{(n-m)!(n+m-n)!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\underbrace{=}_{2.)}\binom{n}{m}$ *falls n≥m//*

Bew: Zunächst Nachweis, dass die beiden Gleichungen sich entsprechen

$$\binom{x+y}{n}=\frac{x(x+y-1)...(x+y-(k-1))}{n!}$$

$$(x+y)(x+y-1)...(x+y-n+1)\underbrace{=}_{S1.7.4}\sum_{k=0}^{n}$$

$$\frac{1*2*...n*x(x-1)...(x-(k-1))}{k!}\,\frac{y(y-1)...(y-(n-k-1)}{1*2*...*(n-k)}=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1*2*...k*(n-(k-1))...(n-1)n*x(x-1)...(x-(k-1))}{k!}\,\frac{y(y-1)...(y-(n-k-1)}{1*2*...*(n-k)}\underbrace{=}_{S1.7.4}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x-1)...(x-k+1)y(y-1)...(y-n+k+1)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-(k-1))...(n-1)n*x(x-1)...(x-(k-1))y(y-1)...(y-(n-k-1))}{1*2*...*(n-k)}=$$

z.z. $\binom{x+y}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$ für x,y∈$\mathbb{R}$ bzw (*) $\prod_{\nu=0}^{n-1}(x+y-\nu)=$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\prod_{\nu=0}^{k-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-k-1}(y-\mu)$$

Bew durch Induktion nach n

n=0: $\underbrace{\binom{x+y}{0}}_{1}=\sum_{k=0}^{0}\binom{x}{k}\binom{y}{0-k}=\underbrace{\binom{x}{0}}_{1}\underbrace{\binom{y}{0-0}}_{1}$ o.k.

n→n+1: Für ein n∈$\mathbb{N}$ gelte (*), dann gilt:

$$\prod_{\nu=0}^{n}(x+y-\nu)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\prod_{\nu=0}^{k-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-k-1}(y-\mu)*(x-k+y-n+k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\prod_{\nu=0}^{k-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-k-1}(y-\mu)*[(x-k)+(y-n+k)]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\prod_{\nu=0}^{k-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-k-1}(y-\mu)*(x-k)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\prod_{\nu=0}^{k-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-k-1}(y-\mu)*(y-n+k)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\prod_{\nu=0}^{k}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-k-1}(y-\mu)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\prod_{\nu=0}^{k-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-k}(y-\mu)\underset{\substack{1.\text{Summe } j=k+1\\ 2.\text{Summe } j=k}}{=}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\prod_{\nu=0}^{j-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-j}(y-\mu)+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\prod_{\nu=0}^{j-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-j}(y-\mu)=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-j}(y-\mu)+$$

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{1}\underbrace{\prod_{\nu=0}^{0-1}(x-\nu)}_{1}\prod_{\mu=0}^{n-0}(y-\mu)+\underbrace{\binom{n}{n+1-1}}_{1}\prod_{\nu=0}^{n+1-1}(x-\nu)\underbrace{\prod_{\mu=0}^{n-(n+1)}(y-\mu)}_{1}=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right)\prod_{\nu=0}^{j-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-j}(y-\mu)+\prod_{\nu=0}^{n}(x-\nu)+\prod_{\mu=0}^{n}(y-\mu)\underset{S1.7.4,D1.5.2}{=}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}\prod_{\nu=0}^{j-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-j}(y-\mu)+$$

$$\underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1}\underbrace{\prod_{\nu=0}^{0-1}(x-\nu)}_{=1}\prod_{\mu=0}^{n+1-0-1}(y-\mu)+\underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{1}\prod_{\nu=0}^{n+1-1}(x-\nu)\underbrace{\prod_{\mu=0}^{n-(n+1)}(y-\mu)}_{=1}=$$

$\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\prod_{\nu=0}^{j-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-j}(y-\mu)$ wie gewünscht :

$$\prod_{\nu=0}^{n-1}(x+y-\nu)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\prod_{\nu=0}^{k-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-k-1}(y-\mu)\underset{n\to n+1}{\Rightarrow}\prod_{\nu=0}^{n}(x+y-\nu)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\prod_{\nu=0}^{k-1}(x-\nu)\prod_{\mu=0}^{n-k}(y-\mu)$$

*//**S1.7.4**(906) Für α∈$\mathbb{C}$ und n,m,k∈$\mathbb{N}_0$ j∈$\mathbb{N}$ gilt//*

//1.) $\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n+1}=\binom{\alpha+1}{n+1}$ *#oder* $\binom{\alpha}{n-1}+\binom{\alpha}{n}=\binom{\alpha+1}{n}$ *#//*

*//**D1.5.2** (709)//*

//In einem Körper K seien Elemente $a,a_1,a_2,....a_n\in K$ für ein $n\in\mathbb{N}$ //

//eindeutig gegeben. Dann definieren wir//

// $\prod_{k=m}^{n}a_k := \begin{cases}1,\ \text{falls } n<m\\ a_m,\ \text{falls } n=m\\ \prod_{k=m}^{n-1}a_k*a_n,\ \text{falls } m+1\geq n\end{cases}$ //

c)Beweise, dass für $x,y\in[1,\infty)$ gilt: $f(x+y)=f(x)*f(y)$ (aus a) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{x}{n}$)

//b)Beweise, dass für $x,y\in R$ gilt: $\binom{x+y}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$//

*//**S3.2.12**(1782)Vor:Seien $(z_n),(w_n)\subset C$ und $\sum_{n=0}^{\infty}|z_n|<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}|w_n|<\infty$.//*

// 2.) $\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n}z_j w_{n-j})=\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=0}^{n}z_j)(\sum_{k=0}^{n}w_k)=(\sum_{j=0}^{\infty}z_j)(\sum_{k=0}^{\infty}w_k)$.//

Bew:Für $x,y\geq 1$ gilt (beachte abs Konvergenz)

$$f(x+y)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{x+y}{n}\underbrace{=}_{b)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}\underbrace{=}_{S3.2.12\,2.)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{y}{k}=f(x)f(y)$$

d)Bestimme (.) $f(n)$, (..) $f(n+\frac{1}{2})$ für $n\in N$. ($f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{x}{n}$)

Lös:(.) $f(n)=2^n\ \forall\ n\in N$. Bew durch Induktion nach n

n=1: $f(1)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1}{k}=\underbrace{\binom{1}{0}}_{1}+\underbrace{\binom{1}{1}}_{1}+\underbrace{\binom{1}{2}}_{0}\dots=2^1=2^n$.

n→n+1:Für ein $n\in N$ gelte $f(n)=2^n$. Dann folgt

$$f(n+1)\underbrace{=}_{c)}f(n)f(1)=2^n*2=2^{n+1}.$$

(..) $f(n+\frac{1}{2})=2^n\sqrt{2}$

Bew durch Induktion nach n

n=1: $f((3/2))^2=f(\underbrace{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}_{=3})\underbrace{=}_{(.)}2^3=8\ \Rightarrow\ f(3/2)=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$

NR: $f(3/2)=f(\frac{3}{4}+\frac{3}{4})=f((3/4))^2$ und

$$f(3/2)*\underbrace{\frac{f(1)}{2}}_{\geq 0}=\frac{f(\frac{5}{2})}{2}\underbrace{=}_{c)}\frac{\overbrace{(f(\frac{5}{2}))^2}^{\geq 0}}{2}\geq 0\ \Rightarrow\ f(3/2)=+2\sqrt{2^1}$$

n→n+1:Für $n\in N$ gelte $f(n+\frac{1}{2})=2^n\sqrt{2}\ \Rightarrow\ f(n+1+\frac{1}{2})\underbrace{=}_{c)}f(n+\frac{1}{2})f(1)=$

$2^n\sqrt{2}*2=2^{n+1}\sqrt{2}$