A3.2.12 Absolute und bedingte Konvergenz?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

*//**S3.1.4**(1605) Vor: $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $a_n \searrow 0\ (n\to\infty)$. Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent//*

Lösung: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{2k+1} \underset{S3.1.4}{\Rightarrow}$ Reihe konvergiert

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ konvergent? $\frac{1}{2k-1} \geq \frac{1}{2k}$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{harmonische\ Reihe}$

Reihe nicht absolut konvergent ⇒ Reihe bedingt konvergent

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

Lösung: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ absolut konvergent, denn $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}$

*//**S3.1.4**(1605) Vor: $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $a_n \searrow 0\ (n\to\infty)$. Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent//*

Lösung: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}$ absolut konvergent? $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}$ konvergent?

$\left|(-1)^k \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}\right| = \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5} \geq \frac{1}{10k} \underbrace{\Rightarrow}_{Vergleich\ mit\ harm\ R}$ Reihe nicht abs konv

$\left|(-1)^k \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}\right| = \left|\frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}\right|$

● k=1: $\left|\frac{1-4}{2+1-5}\right| = \left|\frac{1-4}{2+1-5}\right| = \left|\frac{-3}{-2}\right| = \frac{3}{2} \geq \frac{1}{3} = \left|\frac{1}{2+1}\right| = \left|\frac{k^2}{2k^3+k}\right|$

● ● k≥1: $|k^2-4k| \leq k^2 \wedge |2k^3+k-5| \geq 2k^3+k$

● $\wedge$● ● $\left|\frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}\right| \geq \frac{k^2}{2k^3+k} = \frac{k}{2k^2+1} \geq \frac{k}{2k^2} \geq \frac{1}{2k}$

$a_k' = \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}$ $\searrow$ für $k \geq 8 \underset{S3.1.4}{\Rightarrow}$ Reihe konv ⇒ Reihe bedingt konv

$\frac{\frac{(k+1)^2-4(k+1)}{2(k+1)^3+(k+1)-5}}{\frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}} = \frac{(k^2+2k+1-4k-4)(2k^3+k-5)}{(2(k+1)^3+(k+1)-5)(k^2-4k)} = \frac{(k^2-2k-3)(2k^3+k-5)}{(2(k+1)^3+k-4)(k^2-4k)} =$

$\frac{2k^5+k^3-5k^2-4k^4-2k^2+10k-6k^3-3k+15}{(2k^3+6k^2+6k+2+k-4)(k^2-4k)} = \frac{2k^5-4k^4-5k^3-7k^2+7k+15}{(2k^3+6k^2+7k-2)(k^2-4k)} =$

$\frac{2k^5-4k^4-5k^3-7k^2+7k+15}{2k^5-8k^4+6k^4-24k^3+7k^3-28k^2-2k^2+8k} = \frac{2k^5-4k^4-5k^3-7k^2+7k+15}{2k^5-2k^4-17k^3-30k^2+8k} =$

$\frac{2k-4-\frac{5}{k}-\frac{7}{k^2}+\frac{7}{k^3}+\frac{15}{k^4}}{2k-2-\frac{17}{k}-\frac{30}{k^2}+\frac{8}{k^3}}$ ⇒ ∃ k: $\left|\frac{a}{k}+\frac{b}{k^2}+\frac{c}{k^3}+\frac{d}{k^4}\right| < 4-2=2$

Test k=8: $\frac{65536-16384-2560-448+56+15}{65536-8192-8704-1920+64} = \frac{46215}{46784} < 1$

Für k>9 wird der Einfluß von $-4k^4$ nur noch größer

d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k+1}{3^k-4}$

Lösung: $\left|(-1)^k \frac{2^k+1}{3^k-4}\right| = \frac{2^k+1}{3^k-4} \underbrace{=}_{k\geq 3} \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{\overbrace{1+\frac{1}{2^k}}^{<5/4}}{\underbrace{1-\frac{4}{3^k}}_{<1,>1/2}} \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^k$ für $k\geq 3 \Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k+1}{3^k-4}$ absolut konv wegen Vergleich mit geometrischer Reihe

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$

*//**D3.2.2**(1750)//*
//2.)Ist eine Reihe konvergent, aber nicht unbedingt konvergent, so //
//heißt sie bedingt konvergent.//
*//**S3.2.5**(1750) Absolut konvergente Reihen - und nur diese - sind auch//*
// unbedingt konvergent//
//Eine absolut konvergente Reihe in K ist auch unbedingt konvergent und/ //jede ihrer Umordnungen hat denselben Wert.//
*//**S3.1.4**(1605) Leibniz Kriterium//*
//Vor: $(a_n)\subset \mathbb{R}$, $a_n \searrow 0$ $(n\to\infty)$.//
//Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + - \ldots$ ist konvergent//

Lösung: $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \searrow 0 \underbrace{\Rightarrow}_{S3.1.4}$ Reihe konvergent. $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{k+1}$ $_{Vergleich} \underbrace{\Rightarrow}_{mit\ harm\ Reihe}$
Reihe nicht absolut konv $\Rightarrow$ Reihe ist bedingt konvergent

A3.2.15 Führe den Bew von S3.2.6 für den Fall $a=\infty$

A3.2.16 Zeige, dass unter den Vor von S3.2.6 auch eine Umordnung existiert, welche weder konvergiert noch bestimmt divergiert.

A3.2.17 Finde eine Umordnung von $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu+1}$, welche uneigentlich gegen ∞ konvergiert.

Lös: $\forall\ n\in\mathbb{N}$ gilt $\sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^n+(2\nu-1)} \underset{2\nu-1<2\nu\leq 2\cdot 2^{n-1}}{\geq} \sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^n+2\cdot 2^{n-1}} =$

$2^{n-1}\frac{1}{2^{n+1}}=1/4$. Damit gilt

$1-1/2+\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^n+(2\nu-1)}-\frac{1}{2n+2}\right)>1/2+\sum_{n=1}^{N}\left(1/4-\frac{1}{2n+2}\right)>$

$1/2+0+1/4-1/6+\sum_{n=3}^{N}(1/4-1/8)=$

$1/2+1/4-1/6+(N-2)\cdot 1/8\to\infty$ für $N\to\infty$

Ausgeschrieben:
$1-1/2+(1/3-1/4)+(1/5+1/7-1/6)+$
$(1/9+1/11+1/13+1/15-1/8)+(1/17+1/19+...+1/31-1/10)+$
$\ldots\frac{1}{2^N+1}+\frac{1}{2^N+3}+\ldots+\frac{1}{2^{N+1}-1}-\frac{1}{2N+2} \Rightarrow$

(n=N, $\nu=1$: $\frac{1}{2^N+(2*1-1)}=\frac{1}{2^N+1}$

$\nu=2^{N-1}$: $\frac{1}{2^N+(2*2^{N-1}-1)}=\frac{1}{2^N+(2^N-1)}=\frac{1}{2^N(1+1)-1}=\frac{1}{2^N*2-1}=\frac{1}{2^{N+1}-1}$)

$1-1/2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^n+(2\nu-1)}-\frac{1}{2n+2}\right)=\infty$ und diese Reihe ist

eine Umordnung von $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots.$

A3.2.18 Bestimme den Wert der folgenden Reihen

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

A3.2.19 Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{4k}{3k}}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} 2^{-3k-1}$

c) Für welche $\alpha\in\mathbb{R}$ ist $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log(k))^{\alpha}}$ konvergent?

A3.2.20 Beweise: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Bew: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{\text{abs konv. da Glieder positiv}} \underset{\text{andere Klammerung möglich}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k-1)^2}+\frac{1}{(2k)^2}\right)=$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$

(Glieder pos) $=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

A3.2.21 Zeige mit Hilfe des Cauchykriteriums, dass $\sum_{k=1}^{¥} 1/k=\infty$. Die links stehende Reihe heißt die harmonische Reihe.
//(S1602)Bem:1.)Cauchy-Konvergenzkriterium für unendliche Reihen.//

// *Sei* $(z_n) \subset \mathbb{C}$. $\sum_{v=0}^{¥} z_v$ *konvergiert* $\Leftrightarrow$ $\forall e > 0$ $\exists$ $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *mit* //

// $|\sum_{v=m+1}^{n} z_v| < \varepsilon$ $\forall$ $n > m \geq n_1(\varepsilon)$. *(d.h.* $|S_n - S_m)| < \varepsilon$ $\forall$ $n > m \geq n_1(\varepsilon)$*).//*

A3.2.22 Zeige: Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

A3.2.23 Zeige die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{¥} k^n x^k$ für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ und $\forall$ $x \in \mathbb{K}$ mit $|x|<1$.

A3.2.24 Zeige mit Hilfe des Cauchyschen Verdichtungssatzes, dass die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{k=p}^{¥} k^{-\alpha}$ für $\alpha>1$ konvergiert aber für α ¿ 1 divergiert.