A2.4.1 Finde alle HW der Folge ($x_n=(-1)^n$).

A2.4.2 Finde eine Folge mit unendlich vielen HW
A2.4.3 Zeige: Eine beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn sie nur einen HW hat und dieser ist dann gleich dem Grenzwert.

A2.4.4 Berechne $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ der Folge ($x_n=[2+(-1)^n]^{-n}$)

Lös: Teilfolgen $x_{2n}=3^{-2n}=(1/3)^{2n}=(1/9)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \wedge x_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 1$

und jedes Glied Element einer Teilfolge. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}=1 \wedge \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}=0$

A2.4.5 Zeige: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n=-\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ (-x_n)$

A2.4.6 Zeige $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ (x_n+y_n) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ y_n$. Finde ein Bsp zweier Folgen, für die das < Zeichen gilt

Lös: $x_n=(-1)^n$, $H=\{+1,-1\}$

$y_n=(-1)^{n+1}$, $H=\{+1,-1\}$, $x_n+y_n=0=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ (x_n+y_n)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n=1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ y_n=1$

A2.4.7 Beweise, dass für jede beschränkte Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gilt:

(.) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{k\ge n} a_k\right)$ (..) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\inf\limits_{k\ge n} a_k\right)$

*//**D2.4.2''**(1507)* $\overset{*}{x}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ *gilt* $\begin{cases} x_n \le \overset{*}{x}+\varepsilon \text{ für fast alle } n \\ x_n \ge \overset{*}{x}-\varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases}$ *//*

Bew: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt $\Rightarrow \exists\ g>0$, $|a_n|\le g\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

(.)Sei $b_n:=\underbrace{\sup}_{k\ge n} a_k$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow |b_n|\le g\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

b_n beschränkt, $b_n \searrow$, da $b_{n+1}=\underbrace{\sup}_{k\ge n+1} a_k \le \underbrace{\sup}_{k\ge n} a_k=b_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

#($\underbrace{\sup}_{k\ge n+1}$) fehlt a_n. War a_n der größte Wert, so wird $\underbrace{\sup}_{k\ge n+1} a_k$

#kleiner, andernfalls bleibt $\underbrace{\sup}_{k\ge n+1} a_k$ gleich.

$\{a_k:k>n+1\}$ enthält weniger Werte als$\{a_k:k>n\} \Rightarrow b_n$ konvergiert.

Sei $b:=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{k\ge n} a_k\right)$.(($a_n$)beschränkt $\Rightarrow \exists\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n\in\mathbb{R}$)

Z.z. $b=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n$.

Beweismethode:

Aus $\forall\ \varepsilon>0$ gilt $a_n>b-\varepsilon$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N}$ & $a_n<b+\varepsilon$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$.
folgt $b=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n$

sei $\varepsilon>0$ baf. $\exists\ n_0\in\mathbb{N}$: $|b-b_n|<\varepsilon\ \forall\ n\ge n_0$ (da $b=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$), denn

α) $\underbrace{\sup a_k}_{k\ge n}=b_n \underbrace{\le}_{b_n \text{ mon fallend}} b+\varepsilon\ \forall\ n\ge n_0 \Rightarrow \underbrace{a_n}_{n\ge m} \le \underbrace{\sup a_k}_{k\ge m} < b+\varepsilon \Rightarrow$

$a_n<b+\varepsilon\ \forall\ n\ge n_0$ (für fast alle n)

β) Annahme $a_n>b-\varepsilon$ nur für endlich viele n $\Rightarrow$

$\exists\ n_1\in\mathbb{N}$: $a_n\le b-\varepsilon\ \forall\ n\ge n_1$(fast alle) $\Rightarrow b_n=\underbrace{\sup}_{k\ge n} a_k\le b-\varepsilon\ \forall\ n\ge n_1 \Rightarrow$

$\varepsilon\le b-b_n\ \forall\ n\ge n_1$ Widerspruch zu $|b_n-b|<\varepsilon\ \forall\ n\ge n_0$ Also gilt $a_n>b-\varepsilon$ für unendlich viele n

oder

Definiere $b_n := \underbrace{\sup}_{k\geq n} a_k$, $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ und $a = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

Sei nun $\varepsilon>0$ bel fest $\Rightarrow$

$\exists\ n_0$ mit $a_n<a+\varepsilon \wedge a_n>a-\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow$

$a-\varepsilon\leq b_n\leq a+\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow\quad a-\varepsilon\leq b\leq a+\varepsilon \Rightarrow |a-b|\leq\varepsilon \Rightarrow a=b.$

(..) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{\inf a_n}_{k\geq n})$ wird analog gezeigt oder

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\overline{\lim}_{n\to\infty} (-a_n) \underbrace{=}_{(.)} -\lim_{n\to\infty} \underbrace{\underbrace{\sup}_{k\geq n}(-a_k)}_{=-\underbrace{\inf}_{k\geq n} a_k} = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{\inf a_n}_{k\geq n})$$

A2.4.8 Bestimme jeweils die Menge der Häufungswerte, sowie Limes superior und Limes inferior der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

a) $a_n=2+\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

Lös: $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (2+\underbrace{\frac{2n}{2n+1}}_{\frac{2}{2+1/n}})=2+1=3.\quad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (2+\underbrace{\frac{-(2n+1)}{(2n+1)+1}}_{\to -1})=$

$2-1=1 \Rightarrow H=\{1,3\}$ (Menge der Häufigkeitswerte von a_n). $\Rightarrow$

$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n=3$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n=1$ (da max H=3, min H=1).

Sei $\alpha\in H \Rightarrow \exists$ Teilfolge (a_{ν_n}) von (a_n) mit $a_{\nu_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$,

$\exists$ unendlich viele ν_n der Form 2k oder 2k+1 $k\in\mathbb{N}$. Diese Indizes seien $\nu_{\mu n}$, dann ist $(a_{\nu_{\mu n}})$ eine Teilfolge von (a_{2n}) oder $(a_{2n+1}) \Rightarrow a_{\nu_{\mu n}} \to 1$ oder $a_{\nu_{\mu n}} \to 3$. Wegen $a_{\nu_{\mu n}} \to \alpha$ folgt $\alpha=1$ oder 3 $\Rightarrow H\subseteq\{1,3\}$

b) $a_n=n+(-1)^n\sqrt{n^2+n}$

*//**A2.1.4** (1205) Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n\geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n=a$.//*

// Beweise, dass dann $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$ gilt.//

Lös: $a_{2n}=2n+\sqrt{(2n)^2+(2n)}\geq 2n\ \ \forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow (a_n)$ nicht nach oben beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def limsup } H\neq 0} \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n=\infty$.

$(a_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ ist Teilfolge von $(n-\sqrt{n^2+n})_{n=1}^{\infty}$.

Wegen $\lim_{n\to\infty} (n-\sqrt{n^2+n}) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{-n}{n+\sqrt{n^2+n}} =$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{-1}{1+\sqrt{1+1/n}} \underbrace{=}_{\text{A2.1.14 Stet } \sqrt{\ } \text{Funktion}} \dfrac{-1}{1+\sqrt{1+0}} = -1/2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{S2.1.5}}$

$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}=-1/2 \Rightarrow H=\{-1/2\} \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n=-1/2$

c) $a_n=n/m-[n/m]$ mit einem festen $m\in\mathbb{N}$.

Lös:#Bsp m=3.. $\frac{1}{3}-[\frac{1}{3}]=\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}-[\frac{2}{3}]=\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}-[\frac{3}{3}]=0$,

$\frac{4}{3}-[\frac{4}{3}]=\frac{3*1+1}{3}-[\frac{3*1+1}{3}]=\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}-[\frac{5}{3}]=\frac{3*1+2}{3}-[\frac{3*1+2}{3}]=\frac{2}{3}$, $\frac{3*2}{3}-[\frac{3*2}{3}]=0$,

$\frac{7}{3}-[\frac{7}{3}]=\frac{3*2+1}{3}-[\frac{3*2+1}{3}]=\frac{1}{3}$, $\frac{8}{3}-[\frac{8}{3}]=\frac{3*2+2}{3}-[\frac{3*2+2}{3}]=\frac{2}{3}$, $\frac{3*3}{3}-[\frac{3*3}{3}]=0$,

u.a. $\frac{3*2+1}{3}-[\frac{3*2+1}{3}]=\frac{3*2+1}{3}-[\underbrace{\frac{3*2}{3}}_{\in N}+\frac{1}{3}]=\frac{3*2+1}{3}-\frac{3*2}{3}=\frac{1}{3}$

Für $\nu=0,1,...,m-1$, $a_{m\,n+\nu}=\underbrace{\frac{mn+\nu}{m}}_{n+\frac{\nu}{m}}-[\underbrace{\underbrace{\frac{mn+\nu}{m}}_{n+\frac{\nu}{m}\in[0,1]}}_{=n}]=(n+\nu/m)-\underbrace{\left[\frac{n}{m}\right]}_{=n}=\nu/m\ \Rightarrow$

$H=\{\nu/m:\nu=0,1,..,m-1\}=\{0,1/m,2/m,..,\frac{m-1}{m}\}\ \Rightarrow$

$\underline{\lim}_{n\to\infty}\ a_n=0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}\ a_n=\frac{m-1}{m}=1-\frac{1}{m}$

d) $a_n=2+\frac{(-1)^n n^2}{n^2+1}$

Lös: $a_{2n}=2+\frac{(2n)^2}{(2n)^2+1}=2+\frac{4}{4+\frac{1}{n^2}}\xrightarrow{n\to\infty}3$,

$a_{2n+1}=2-\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2+1}=2-\frac{(2+\frac{1}{n})^2}{(2+\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n^2}}\xrightarrow{n\to\infty}1\ \Rightarrow\ H=\{1,3\}$

$\underline{\lim}_{n\to\infty}\ a_n=1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}\ a_n=3$. Es sei $(a_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Dann enthält die Folge $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ der Indizes ∞ viele gerade oder ∞ viele ungerade Folgeglieder. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{\tilde{n}_k})_{k=1}^{\infty}$ von $(a_{n_k})_{n=1}^{\infty}$, die nur gerade bzw nur ungerade (was den Index angeht) Folgeglieder enthält $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{\tilde{n}_k}=3$ oder $\lim_{k\to\infty} a_{\tilde{n}_k}=1\ \Rightarrow\ a_{n_k}\lim_{k\to\infty}=3$ oder $a_{n_k}\lim_{k\to\infty}=1$. Daraus folgt, dass keine weiteren HW existieren.

e) $a_n=\frac{n}{3}-\left[\frac{n}{3}\right]$

Lös: $a_{3k+\nu}=\frac{3k+\nu}{3}-\left[\frac{3k+\nu}{3}\right]=k+\frac{\nu}{3}-\left[k+\frac{\nu}{3}\right]=k+\frac{\nu}{3}-k\,\frac{\nu}{3}$ für $\nu=0,1,2$.

Wie in a) zeigt man, dass keine weiteren HW existieren können $\Rightarrow$

$H=\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty}\ a_n=0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}\ a_n=\frac{2}{3}$

f) $a_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n(-1)^{b_n}}$, wobei $b_n=3\left(\frac{n}{3}-\left[\frac{n}{3}\right]\right)$

Lös: n	$\frac{(-1)^n}{n}$	b_n (siehe a)	$(-1)^{b_n}$	$n(-1)^{b_n}$
1	$\frac{-1}{1}=-1$	$3*\frac{1}{3}=1$	$(-1)^1=-1$	$1*(-1)^1=-1$
2	$\frac{(-1)^2}{2}=+\frac{1}{2}$	$3*\frac{2}{3}=2$	$(-1)^2=1$	$2*(-1)^2=2$
3	$\frac{(-1)^3}{3}=-\frac{1}{3}$	$3*0=0$	$(-1)^0=1$	$3*(-1)^1=-3$
4	$\frac{(-1)^4}{4}=+\frac{1}{4}$	$3*\frac{1}{3}=1$	$(-1)^1=-1$	$4*(-1)^{-1}=-4$
5	$\frac{(-1)^5}{5}=-\frac{1}{5}$	$3*\frac{2}{3}=2$	$(-1)^2=1$	$5*(-1)^1=5$
6	$\frac{(-1)^6}{6}=+\frac{1}{6}$	$3*0=0$	$(-1)^0=1$	$6*(-1)^1=-6$
7	$\frac{(-1)^7}{7}=-\frac{1}{7}$	$3*\frac{1}{3}=1$	$(-1)^1=-1$	$7*(-1)^{-1}=-7$ usw

$b_{3k+v}=v$, $(-1)^{b_{3k+v}}=\begin{cases}1, v=0,2\\-1, v=1\end{cases}$. Wir betrachten Teilfolgen $a_{6k+v?}$:

$\left(1+\frac{1}{6k+v}\right)^{6k+v}\overset{k\to\infty}{\to}$ e, $v=0,2$ $\qquad\left(1-\frac{1}{6k+v}\right)^{-6k+v}\overset{k\to\infty}{\to}$ e, $v=1$

$\left(1-\frac{1}{6k+v}\right)^{6k+v}\overset{k\to\infty}{\to}$ 1/e, $v=3,5$ $\qquad\left(1+\frac{1}{6k+v}\right)^{-(6k+v)}\overset{k\to\infty}{\to}$ 1/e, $v=4$

Wie vorher folgt $H=\{\frac{1}{e},e\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n=1/e$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n=e$

g) $a_n=\frac{1}{(((-1)^{n+1}-2))^n}$

- a_n beschränkt? … 2 Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k\in N}$, $(a_{2k})_{k\in N}$.

  $a_{2k}=\frac{1}{(((-1)^{2k}-2))^{2k-1}}=-1$, $a_{2k+1}=\frac{1}{(((-1)^{2k+1}-2))^{2k}}=\frac{1}{9^k}=(\frac{1}{9})^k \Rightarrow a_1=-1\leq a_n\leq\frac{1}{9}=a_n$

  $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt

- sup, inf, min, max?

  $a_n=-1=\min\{a_n|n\in N|\}=\inf\{a_n|n\in N|\}$

  $a_2=\frac{1}{9}=\max\{a_n|n\in N|\}=\sup\{a_n|n\in N|\}$

- Häufungswerte (HW)?

  $a_{2k-1}=-1$ ist HW

  Jeder Grenzwert einer Teilfolge von $(a_n)_{n\in N}$ liegt zwischen -1 und $\frac{1}{9}$ $\Rightarrow$

  $-1=H$ ist kleinstmöglicher HW $\Rightarrow -1\leq\min H\leq\frac{1}{9}\Rightarrow -1\in H\Rightarrow -1=\min H=\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

A2.4.9 (1514) Gegeben seien zwei beschränkte Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Zeige:

a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n b_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n * \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$ mit $a_n, b_n \ge 0 \;\forall\; n\in\mathbb{N}$.

//D2.4.2'' (1507)

// $\overset{*}{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0$ gilt: $\begin{cases} x_n \ge \overset{*}{x} + \varepsilon \text{ höchstens für endlich viele } n \\ x_n \ge \overset{*}{x} - \varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases}$,

// $\overset{*}{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0$ gilt $\begin{cases} x_n \le \overset{*}{x} + \varepsilon \text{ für fast alle } n \\ x_n \ge \overset{*}{x} - \varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases}$

Bew: $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $a, b \ge 0$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n b_n \le ab$?...

Z.z. $\forall\, \varepsilon>0 \;\exists\; n_0\in\mathbb{N}$: $a_n b_n \le ab+\varepsilon \;\forall\; n\ge n_0$. Daraus folgt Beh.

Sei dazu $\varepsilon>0$ baf, $\tilde{e}>0$ Lösung von

$(a+b)\tilde{e} + \tilde{e}^2 = \varepsilon$ $\left(\tilde{e} = \underbrace{-\frac{a+b}{2} + \sqrt{e + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}}_{>0}\right)$

NR: $\left(\tilde{e} + \frac{a+b}{2}\right)^2 = \tilde{e}^2 + (a+b)\tilde{e} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \varepsilon + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\tilde{e} = \underbrace{-\frac{a+b}{2} + \sqrt{e + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}}_{>0}$)

$a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \underbrace{\Rightarrow}_{\text{D2.4.2''}} \exists\; n_1\in\mathbb{N}$: $\underbrace{a_n \le a + \tilde{e}}_{\text{fast alle unterhalb....}} \;\forall\; n \ge n_1$

$b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n \underbrace{\Rightarrow}_{\text{D2.4.2''}} \exists\; n_2\in\mathbb{N}$: $b_n \le b + \tilde{e} \;\forall\; n\ge n_2$

Sei $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow a_n b_n \underbrace{\le}_{n\ge n_1 \wedge n\ge n_2} (a+\tilde{e})(b+\tilde{e}) = (a+b)\tilde{e} + \tilde{e}^2 = \varepsilon \;\forall\; n \ge n_0$

b) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ für ein $a\ge 0$, so gilt: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n b_n = a * \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$

mit $\underbrace{a_n}_{(a_n) \text{ beschränkt}}$, $\underbrace{b_n}_{(b_n) \text{ beschränkt}} \ge 0 \;\forall\; n\in\mathbb{N}$.

Bew: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n = b \Rightarrow \exists$ Teilfolge (b_{v_n}) von (b_n) mit $b_{v_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} b$,

(a_{v_n}) Teilfolge von $(a_n) \Rightarrow a_{v_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} a \underbrace{\Rightarrow}_{GW \text{ Regeln}} a_{v_n} b_{v_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} ab$

$\Rightarrow ab$ ist HW von $(a_n b_n) \Rightarrow ab \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n b_n \underbrace{\le}_{a)} ab \Rightarrow ab = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, (a_n b_n)$

c) $\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.

Bew: ● $\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$

Es sei $a=\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ und $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=a$. $\underbrace{(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}}_{Vor.\ beschränkt} \Rightarrow \exists$ eine konvergente Teilfolge $(b_{\tilde{n}_k})_{k=1}^{\infty}$.

Beachte: $\lim_{k\to\infty} a_{\tilde{n}_k}=a$ #$(a_{\tilde{n}_k})$ Teilfolge von a_{n_k})#, dann gilt

$\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \lim_{k\to\infty}(a_{\tilde{n}_k}+b_{\tilde{n}_k}) = a + \underbrace{\lim_{k\to\infty} b_{\tilde{n}_k}}_{irgendein\ HW \le dem\ größten} \le \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

● $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.

$(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ sei eine Teilfolge von $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

Weiter sei $(a_{\tilde{n}_k})_{k=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n) \ge \lim_{k\to\infty}(a_{\tilde{n}_k}+b_{\tilde{n}_k}) = \lim_{k\to\infty} a_{\tilde{n}_k} + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \ge \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

d) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

Bew: Sei $\varepsilon>0$ baf, $\exists\ n_0(\varepsilon)$ mit $a_n<a+\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall\ n\ge n_0(\varepsilon)$ und

$\exists\ n_1(\varepsilon)$ mit $b_n<b+\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall\ n\ge n_1(\varepsilon)$,

wobei $a=\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ und $b=\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \Rightarrow a_n+b_n\le a+b+\varepsilon$ $\forall\ n\ge \max\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\}$

$\Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le a+b$

A2.4.10 Bestimme alle Häufungswerte der Folge $(i^n)_{n=1}^{\infty}$

Lös: $i^n=\begin{cases} 1 \text{ falls } n=4k \\ i \text{ falls } n=4k+1 \\ -1 \text{ falls } n=4k+2 \\ -i \text{ falls } n=4k+3 \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$, nach A1.6.8 a)

Im Komplexen keine Anordnung $\Rightarrow$ kein $\overline{\lim}_{n\to\infty}$ und $\underline{\lim}_{n\to\infty}$ $\Rightarrow$

$H=\{1, i, -1, -i\}$

A2.4.11 $\overline{\lim}_{n\to\infty}$ und $\underline{\lim}_{n\to\infty}$ und alle HW für die Folgen (x_n)?

a) $x_n=((-1)^{n+1}-2)^{-n}$.

Lös: HW $-1, 0$; $\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)=-1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)=0$

b) $x_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{4}} \frac{(-1)^n}{n}$

Lös: $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ HW, $\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)=\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)=0$

c) $x_n=(2(-1)^n-(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}})^n$.

Lös: $x_{4k}\to 1$ HW, $x_{4k-1}\to -\infty = \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)$, $x_{4k-2}\to +\infty = \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)$, $x_{4k-3}\to -1$ HW

d) $a_n=$, $k\in\mathbb{N}$.

e) $a_n \begin{cases} 1+1/2^n, \text{falls } n=3k \\ 1+\frac{n+1}{n}, \text{falls } n=3k-1 \\ 2, \text{falls } n=3k-2 \end{cases} = (-1)^n \sqrt[n]{n} + \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

A2.4.12 Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge positiver reeller Zahlen.

Zeige: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Bew fehlerhaft????!!!! Richtigen Bew suchen!!!

*//**D2.4.2''**(1507)* $\overset{*}{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ *gilt* $\begin{cases} x_n \le \overset{*}{x} + \varepsilon \text{ für fast allen } n \\ x_n \ge \overset{*}{x} - \varepsilon \text{ für } \infty \text{ vielen } n \end{cases}$ *//*

Bew:O.B.d.A. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R<\infty$. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le R+\varepsilon\ \ \forall\ n\ge n_0 \Rightarrow$

$\forall\ n>n_0$ gilt: $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0} = a_{n_0} \prod\limits_{v=0}^{n-n_0-1} \frac{a_{n_0+v+1}}{a_{n_0+v}} \le a_{n_0} (R+\varepsilon)^{n-n_0}$

$= \frac{a_{n_0}}{(R+\varepsilon)^{n_0}} (R+\varepsilon)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \underbrace{\le}_{\forall\ n>n_0} \overbrace{\sqrt[n]{\underbrace{\frac{a_{n_0}}{(R+\varepsilon)^{n_0}}}_{c}}}^{\to 1} (R+\varepsilon) \underbrace{\to}_{n\to\infty} (R+\varepsilon) \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le R+\varepsilon.$

Da $\varepsilon>0$ baf, folgt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le R$.

A2.4.13 $x_n = \sum\limits_{j=1}^{n} 1/j$, $n\in\mathbb{N}$. Benutze die Monotonie von $(1/j)$ um zu zeigen, dass $x_{2n}-x_n>n/(2n)=1/2$ ist.

Lös: $x_{2n}-x_n = \sum\limits_{j=n+1}^{2n} 1/j \ge n\frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2}$ ⇒ keine Cauchyfolge ⇒ nicht konvergent ⇒ bestimmt divergent

A2.4.14 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}$, Konvergenz?

a) $a_n=n(-1)^n$

Lös: Annahme $\exists$ HW=ξ beliebig von (a_n). Wahl $n_0>|\xi|+1 \Rightarrow$

Für irgendein gerades $n>n_0$ ist dann $n>\xi \Rightarrow$

$|a_n-\xi|=|n-\xi|=n-\xi>1>n_0-\xi>1$

Für irgendein ungerades $n>n_0$ ist dann $n>\xi \Rightarrow$

$|a_n-\xi|=|-n-\xi|=n+\xi>1>n_0+\xi>1$

⇒ HW Bedingung $|a_n-\xi|<\varepsilon$ für $\varepsilon=1$ ab n_0 verletzt ⇒

Nur endliche viele $n=1,2,3,\ldots, n_0$ können die Schranke einhalten ⇒

Widerspruch zur Def des HW $\underbrace{\Rightarrow}_{\xi \text{ beliebig}}$

Hinweis: Strebt eine Teilfolge gegen ∞, eine andere gegen -∞, so kann es trotzdem HW geben. Bsp mit HW 0:

$a_n' = \begin{cases} n \text{ falls } n=1,4,7,10,.. \\ -n \text{ falls } n=2,5,8,11,\ldots \\ 0 \text{ falls } n=3,6,9,\ldots \end{cases}$

b) $b_n=\frac{1}{n}(-1)^n$

Lös: $|b_n| \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \Rightarrow b_n$ konvergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$

c) $c_n=c(-1)^n$, $c\in\mathbb{R}$ konstant.
Lös: $|c_n|$ konvergiert, aber $\lim_{n\to\infty} \underbrace{c_{2n}}_{Teilfolge} = c$ & $\lim_{n\to\infty} \underbrace{c_{2n+1}}_{Teilfolge} = -c \Rightarrow$

c_n divergent, $=\overline{\lim_{n\to\infty}} c_n=|c|$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} c_n=-|c|$

d) $d_n=\phi(n)$, ϕ irgendeine bijektive Abbildung: $\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$,
ϕ existiert, siehe Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$.

*//**D2.4.1'**(1500)*
//1.)Sei $(z_n)\subset\mathbb{C}$. Eine komplexe Zahl $z\in\mathbb{C}$ heißt HW von (z_n), falls eine
// konvergente Teilfolge (z_{v_n}) mit Grenzwert z existiert.
// $z\in\mathbb{C}$ ist HW von (z_n) $\Leftrightarrow$ $\exists$ Teilfolge (z_{v_n}) von (z_n) mit $\lim_{n\to\infty} z_{v_n}=z$
// Bem:Falls $z_n\to z$, d.h.konvergent, so besitzt sie nur 1 HW.
#Lös: divergent, da jedes $q\in\mathbb{Q}$ ein HW ist
$\forall$ $x\in\mathbb{Q}$ $\exists$ $(q_{x_v})_{v=1}^{\infty}$: $\lim_{v\to\infty} q_{x_v}=x \Rightarrow \forall$ $x\in\mathbb{Q}$: x ist HW $\Rightarrow d_n$ (divergent