A2.1.12 Untersuche die durch $a_n=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n \frac{n^2}{n^2+1}$ definierte Folge $(a_n)_{n=1}^{\text{¥}}$ auf Konvergenz.

Lös: Wenn a_n konvergiert $\exists$ ein $n_0(\varepsilon)$, sodass $\forall\ \varepsilon>0$ gilt:

$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)\ \ \forall\ p\in\mathbb{N}$, insbesondere $|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)$.

$$|a_{n+1}-a_n|=\left|\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n\frac{n^2}{n^2+1}\right|=$$

$$\underbrace{\left|\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n\right|}_{1}\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}-\frac{n^2}{n^2+1}\right|\underbrace{\geq}_{|z|>|\mathrm{Im}(z)|}\left|\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}-\frac{n^2}{n^2+1}\right)\right|=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2^2+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4}{5}>\varepsilon\ \Rightarrow$$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ divergiert.

A2.1.13

Zeige oder widerlege: Konvergiert die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen $a\in\mathbb{R}$, so konvergiert die Folge $([a_n])_{n=1}^{\infty}$ gegen $[a]$. ($[x]$: das größte Ganze von x).

*//**S2.1.2** (1250) (z_n), $z_n\xrightarrow{n\to\infty}z$, $z,z_n\in\mathbb{C}$. 2.) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine Cauchy Folge,//*

// d.h. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit $|z_n-z_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_0$//

Lös: Aussage gilt nicht! Bsp: $a_n=\frac{(-1)^n}{n}\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, aber

$\lim\limits_{n\to\infty}[a_n]$ existiert nicht, denn $[a_n]=\begin{cases}-1 \text{ falls } n \text{ ungerade}\\ 0 \text{ falls } n \text{ gerade}\end{cases}$,

$[a_{n+1}]-[a_n]\not\to 0\ \ (n\to\infty)$

Genauere Begründung: Zu $\varepsilon>0$ wähle $n_0=[1/\varepsilon]+1\ \Rightarrow$

$|a_n-0|=1/n\leq 1/n_0<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0$, sowie $|[a_{n+1}]-[a_n]|=1\ \ \forall\ n\ \Rightarrow$

$([a_n])_{n=1}^{\infty}$ keine Cauchy Folge $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{S2.1.2 2)}}$ $([a_n])_{n=1}^{\infty}$ konvergiert nicht oder

$[a_{n+1}]-[a_n]\not\to 0\ \ (n\to\infty)$

A2.1.14 Untersuche jeweils die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n=\frac{n^5+n^4-3n^2}{2n^5-3n+5}$

Lös: $\frac{n^5+n^4-3n^2}{2n^5-3n+5}=\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^3}}{2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^5}}\to 1/2$

b) $a_n=\frac{n^5-(n^3+2)(n^2+n)}{7n^4+2}$

Lös: $a_n=\dfrac{-n^4-2n^2-2n}{7n^4+2}=\dfrac{-1-2\overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0}-2\overbrace{\frac{1}{n^3}}^{\to 0}}{7+2\underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\to 0}}\underbrace{=}_{n\to\infty}$

$\dfrac{-1-2\cdot 0-2\cdot 0}{7+2\cdot 0}$=-1/7

c) $a_n=\dfrac{n^2}{2n+1}$

//**S2.1.2** *(1250) $(z_n)\in\mathbb{C}$, $z_n \overset{n\to\infty}{\to} z, z_n\in C$. 1.) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist beschränkt//*

Lös: $a_n=\dfrac{n^2}{2n+1}\geq\dfrac{n^2}{2n+n}$=n/3 $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist nicht beschränkt

sonst $\exists$ M>0: $a_n\leq M$ $\forall$ n $\Rightarrow$ $n\leq 3M$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ Widerspruch

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{S2.1. 2.1.)}}$ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ divergiert

d) $a_n=\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

//***A2.1.13** a) (1256) Geg: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $a_n\geq 0$ $\forall$ $n\in N$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\in R$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$ .//*

Lös: $a_n=\sqrt{n}\,\dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}})=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\dfrac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\underbrace{=}_{\text{A2.1.13 a)}}\dfrac{1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{1+1}}$=1/2

$\lim\limits_{n\to\infty}1=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}1/n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} 1+1/n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+1/n}=\sqrt{1}=1$ $\Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+1/n}+1=2$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1/2$

e) $a_n=\sqrt{n}\,(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})$ mit a,b>0

Lös: $a_n=\sqrt{n}\,(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})\,\dfrac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}=\dfrac{\sqrt{n}(n+a-(n+b))}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}=$

$(a-b)\dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{1+a/n}}_{\to 1}+\underbrace{\sqrt{1+b/n}}_{\to 1}}\to\dfrac{a-b}{2}$

f) $a_n=nx^n$ für ein $x\in\mathbb{R}$ mit $|x|<1$

Lös: Vermutung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Setze $h=\dfrac{1}{|x|}-1>0$ $\Rightarrow$ $|x|=\dfrac{1}{1+h}$. Sei $\varepsilon>0$ baf.

Wähle $n_0=\left[\frac{2}{h^2\epsilon}\right]+2 \Rightarrow |a_n-0| = n|x|^n = \frac{n}{(1+h)^n} = \frac{n}{\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}h^k}_{\geq 0}} \leq$

$$\frac{n}{1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\sum_{v=3}^{n}\binom{k}{n}h^v} < \frac{2}{h^2}\frac{1}{n-1}$$

$\leq \frac{2}{h^2}\frac{1}{n_0-1} < \frac{2}{h^2}\frac{1}{\left[\frac{2}{h^2 e}\right]+2-1} = \frac{\frac{2}{h^2}}{\underbrace{\left[\frac{2}{h^2\varepsilon}\right]+1}_{>\frac{2}{h^2\varepsilon}}} < \varepsilon \ \forall \ n\geq n_0$ da $n_0 > \left[\frac{2}{h^2 e}\right]+1 \underbrace{\Rightarrow}_{D2.1.1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ und $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert

Bem: Für beliebig kleine ε wähle $n_0=\left[\frac{2}{h^2\epsilon}\right]+\underbrace{c}_{>2}$

*// **S2.1.2** (1250) (a_n), $a\in\mathbb{R}$, $a_n \overset{n\to\infty}{\to} a$.//*
// 2.) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in N$ mit $|z_n-z_m|<\varepsilon\ \forall\ n,m\geq n_0$//

g) $a_n=\frac{(-1)^n n}{n+1} \Rightarrow |a_{n+1}-a_n| = \frac{n+1}{n+2}+\frac{n}{n+1} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1+1=2 \Rightarrow a_{n+1}-a_n \underbrace{\nrightarrow}_{n\to\infty} 0$ |

$\underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.2\ 2.)}$ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert nicht

h) $a_n=\frac{n^4-i}{i-n^4} = \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{1-in^{-4}}{in^{-4}-1}\ \underbrace{\frac{1-0}{0-1}\ \overbrace{\to}^{n^{-4}\xrightarrow{n\to\infty}0 \Rightarrow in^{-4}\xrightarrow{n\to\infty}0}}_{n\to\infty} = -1$

i) $b_n=\left(\frac{i}{2}\right)^n$

Lös: $|b_n| = |(i*\frac{1}{2})^n| = |i|^n|\frac{1}{2}|^n = 1^n * \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1*0=0$

A2.1.15

a) Vor: Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt. Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=0$.

*//**D2.1.1** (1200) $(z_n)=(z_n)_n^{\infty}$ aus K konvergent $\Leftrightarrow\ \exists\ z\in K$:*
// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\in N$ mit $|z_n-z|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$. //

Bew: Nach Vor $\exists\ k>0: |b_n|\leq k\ \forall\ n\in\mathbb{N}$. Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=0$ mit **D2.1.1.**

Sei $\varepsilon>0$ baf, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \Rightarrow$

Zu $\bar{e}=\varepsilon/k>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}$ mit $|a_n|=|a_n-0|<\bar{e}=\varepsilon/k\ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow$

$|a_n b_n-0| = \underbrace{|a_n|}_{<e/k}\underbrace{|b_n|}_{<k} < k\underbrace{|a_n|}_{<e/k} < \varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$

(Es wurde also gezeigt: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}$ mit $|a_n b_n-0|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$)

b) Es sei $q\in[0,1)$ und $0\leq x_{n+1}\leq qx_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$. Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

*//**S2.1.3** (1255) (a_n), (b_n), (c_n) Folgen aus R: $a_n\to a$, $b_n\to b$, $(n\to\infty)$//*
//3.) $a_n\leq c_n\leq b_n$ für fast alle $n\in N$ und $a=b \Rightarrow c_n\to a\ (n\to\infty)\ a_n\to a,\ b_n\to b=a$//

Bew: Beh: (.) $x_n\leq q^n x_0\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$ $(x_n=q^0x_n\leq qx_{n-1}\leq q^2x_{n-2}\leq\ldots\leq q^nx_0)$ (..) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

(.) Induktion nach n

$n=0$: $\quad x_0 \le x_0 = \underbrace{q^0}_{<1} x_0$

$n \to n+1$: $x_{n+1} \le q \underbrace{x_n}_{\text{IndHyp} \le q^n x_0} \le q q^n x_0 = q^{n+1} x_0$

(..) Nach (.) gilt: $\underbrace{0}_{a_n} \le \underbrace{x_n}_{c_n} \le \underbrace{q^n x_0}_{b_n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0 \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} q^n}_{=0,\,\text{da}|q|<1} = x_0 * 0 = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{S2.1.3 3.)}} \quad x_n = c_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$

A2.1.16 Definiere für $p \in \mathbb{N}_0$ die Folge $(S_n^p)_{n=1}^{\infty}$ durch $S_n^p = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$.

a) Beweise: $\sum\limits_{\nu=1}^{p+1} \binom{p+1}{\nu} S_n^{p+1-\nu} = (n+1)^{p+1} - 1$.

*//**S1.7.1** (901) $m \le n \in N$, $a_k \in C$, $m \le k \le n$ $\quad \sum\limits_{k=m,\, n\ge m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$ //*

*//**S1.7.4** (906) $\alpha \in C \wedge n,m,k \in N_0$, $j \in N$://*

// 6.) $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} a^k$, $(1+z)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k z^{n-k}$//

Hinweis: Beachte, dass $(x+1)^{p+1} - x^{p+1} = \sum\limits_{\nu=1}^{p+1} \binom{p+1}{\nu} x^{p+1-\nu}$ für $x \in \mathbb{R}$. $\binom{p+1}{k}$

Bew: $(x+1)^{p+1} - x^{p+1} = \sum\limits_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} x^{p+1-k} - x^{p+1} = \sum\limits_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} x^{p+1-k} \Rightarrow$

$(n+1)^{p+1} - 1 \underbrace{=}_{S1.7.1} \sum\limits_{k=1}^{n} ((k+1)^{p+1} - k^{p+1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{\nu=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} k^{p+1-\nu} - k^{p+1} =$

$\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{\nu=1}^{p+1} \binom{p+1}{\nu} k^{p+1-\nu} = \sum\limits_{\nu=1}^{p+1} \binom{p+1}{\nu} \sum\limits_{k=1}^{n} k^{p+1-\nu} = \sum\limits_{\nu=1}^{p+1} \binom{p+1}{\nu} S_n^{p+1-\nu}$.

b) Untersuche die Folgen (.) $\left(\frac{S_n^p}{n^{p+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ und (..) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k}\right)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz

Lös: (.) Bew von $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$ durch Induktion nach p

(Wie errät man $\frac{1}{p+1}$??)

P=0: $S_n^0=\sum_{k=1}^{n} k^0=n \Rightarrow \frac{S_n^0}{n} \underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} 1$

p p+1: Es gelte $\frac{S_n^k}{n^{k+1}}\to\frac{1}{k+1}$ für $0\le k\le p$ mit $p\in\mathbb{N}_0$.

Z.z. $\frac{S_n^{p+1}}{n^{p+2}}=\frac{1}{p+2}$. Nach Teil a) $\sum_{\nu=1}^{p+1}\binom{p+1}{\nu} S_n^{p+1-\nu}=(n+1)^{p+1}-1$ gilt

$1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+2}}((n+1)^{p+2}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+2}}\sum_{k=1}^{p+2}\binom{p+2}{k} S_n^{p+2-k}=$

$\lim_{n\to\infty}(\frac{S_n^{p+1}}{n^{p+2}}(p+2)+\sum_{k=2}^{p+2}\binom{p+2}{k}\underbrace{\frac{S_n^{p+2-k}}{n^{p+3-k}}}_{\to\frac{1}{p+3-k}}\underbrace{\frac{1}{n^{k-1}}}_{\to 0}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{p+1}}{n^{p+2}}=1/(p+2) \Rightarrow$ Beh

$\#\frac{S_n^{p+2-(2\ldots p+2)}}{n^{p+3-(2\ldots p+2)}}=\frac{S_n^{p-(0\ldots p)}}{n^{p-(1\ldots p+1)}}=\frac{S_n^{p\ldots 0}}{n^{(p+1)\ldots 1}}=\frac{S_n^{\overbrace{p\ldots 0}^{0\le 0\ldots p\le p}}}{n^{(p+1)\ldots 1}}$

$\#\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+2}}((n+1)^{p+2}-1)=\lim_{n\to\infty}(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{p+2}-\underbrace{\frac{1}{n^{p+2}}}_{\to 0})=\lim_{n\to\infty}(\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)^{p+2}\to 1$

(..)Es gilt: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}=\frac{S_n^2}{n^3}\overset{n\to\infty}{\to} 1/3$ und $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+n}=$

$\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\overset{n\to\infty}{\to} 1/3$, also nach Einschließung $\overset{n\to\infty}{\to} 1/3$

(1259) $\sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+n^2+2n^2+n}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=$

$\frac{n^3}{3}(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2})$

A2.1.17

a) Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei definiert durch $a_0:=3$ und $a_n:=\sqrt{8+2a_{n-1}}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$. Zeige, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und berechne den Grenzwert.

*//**S2.1.2** (1250)Eigenschaften konvergenter Folgen//*

//Vor: $(z_n),(w_n),z,w\in\mathbb{C}$, $z_n\overset{n\to\infty}{\to} z$, $w_n\overset{n\to\infty}{\to} w$ 5.) $\lim_{n\to\infty}(z_n+w_n)=z+w$//

//**A2.1.4** (1205) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n \ge 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $\sqrt{a_n} \lim\limits_{n\to\infty} = \sqrt{a}$ //

Lös: Wenn $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert, etwa $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, dann folgt

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{8+2a_{n-1}} \underbrace{=}_{A2.1.4} \sqrt{8+2a} \Rightarrow a^2=8+2a \Rightarrow a^2-2a-8=0 \Rightarrow$$

$a=4$, $a=-2$.

Vermutung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=4$. Beachte, dass für $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$|a_n-4| = |\sqrt{8+2a_{n-1}}-4| \frac{\sqrt{8+2a_{n-1}}+4}{\sqrt{8+2a_{n-1}}+4} = \frac{|8+2a_{n-1}-16|}{\sqrt{8+2a_{n-1}}+4} =$$

$$\frac{2|a_{n-1}-4|}{\sqrt{8+2a_{n-1}}+4} \le \frac{2|a_{n-1}-4|}{4} = \frac{|a_{n-1}-4|}{2}.$$

Also gilt $|a_n-4| \le \frac{1}{2^n}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$ (Beweis durch Induktion)

n=0: $|a_0-4|=|3-4|=\frac{1}{2^0}$

n n+1: Es gelte $|a_n-4| \le \frac{1}{2^n}$ für ein $n\in\mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$|a_{n+1}-4| \le \frac{1}{2}|a_n-4| \le \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow |a_n-4| \xrightarrow{n\to\infty} 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n=4$$

b) Es seien $a,b\in\mathbb{R}$. Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei definiert durch $a_0=a$, $a_1=b$, $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}$ für $n>1$. Zeige, dass a_n konvergiert und bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Lös: # $a_2=\frac{a_1+a_0}{2}=\frac{1}{2}(b+a)$

$a_3=\frac{\frac{1}{2}(b+a)+b}{2}=\frac{1}{4}(3b+a)$, $\qquad a_3-a_2=\frac{1}{4}(b-a)=(-\frac{1}{2})^2(b-a)$

* $a_4=\frac{\frac{1}{4}(3b+a)+\frac{1}{2}(b+a)}{2}=\frac{1}{8}(5b+3a)$, $a_4-a_3=\frac{1}{8}(-b+a)=-\frac{1}{8}(b-a)=(-\frac{1}{2})^3(b-a)$

Es gilt $a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}-a_n=(-\frac{1}{2})(a_n-a_{n-1}) \Rightarrow$

$a_{n+1}-a_n=(-\frac{1}{2})^n(a_1-a_0)=(-\frac{1}{2})^n(b-a)$.

Bew durch Induktion wie im Teil a) $\Rightarrow$

Für $n\in\mathbb{N}$ gilt $a_n=a_n-a_0+a_0=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)+a=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-\frac{1}{2})^n(b-a)+a=\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(\frac{1}{2})}(b-a)+a$

$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{2}}(b-a)+a=\frac{2b+a}{3}$ $(n\to\infty)$

A2.1.19 Untersuche jeweils die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimme ggf den Grenzwert:

a) $a_n=\frac{(3n+1)^3}{(2n-1)(2-3n)^2}$

b) $a_n=n^2x^n$ für $x\in\mathbb{R}$ mit $|x|<1$

c) $a_n=n^2(n-\sqrt{n^2-1})$

d) $a_n=\frac{a^{2n}-1}{a^{2n+1}+1}$ für $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

A2.1.20

a) Zeige: Zu jedem $x\in\mathbb{R}$ existiert eine Folge $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $r_n\in\mathbb{Q}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} r_n=x$.

b) Es sei $\mathbb{F}$ die Menge aller Folgen aus $\mathbb{R}$,
d.h. $\mathbb{F}=\{(a_n)_{n=1}^{\infty}: a_n\in\mathbb{R}\ \forall\ n\in\mathbb{N}\}$. Auf $\mathbb{F}$ sei folgende Relation definiert: $(a_n)_{n=1}^{\infty}\sim(b_n)_{n=1}^{\infty} :\Leftrightarrow (a_n-b_n)_{n=1}^{\infty}$ ist eine Nullfolge.
Zeige, daß $\sim$ auf $\mathbb{F}$ eine Äquivalenzrelation ist und gebe die Äquivalenzklasse einer konstanten Folge an.